複数の評価の集約方法
—割れた評価をまとめれば上手くいく—

山本　芳嗣

本稿は本誌 2012 年 6 月号「1 人 1 票から Majority Judgment へ」(pp. 295–301) の続編ですが，「1 人 1 票…」をお読みでない方にも読んでいただけるように配慮しました．まず「1 人 1 票…」に沿って Majority Judgment を振り返り，その問題点を挙げ，それを解決する理論的方法を示します．最後にその方法を実際に使うための具体的手順を説明します．証明などは補足にまとめましたので興味をおもちの方はお読みください．

キーワード：Majority Judgment，匿名性，全員一致性，単調性，戦略的操作耐性，集約関数，順位関数，中位関数，調停評価

1. はじめに

年度末の近づいた 2 月は大学人にとって最も忙しく，1 年間の指導の成否が問われる卒業論文の発表会のある月です．かつて筆者がいた筑波大学理工学群社会工学類の経営工学主専攻では卒業研究の発表を教員が評価し，その年度の最も優れた卒業研究を倉谷賞 [1] の候補として同窓会に推薦することを 2006 年度から行ってきました．選考方法の若干の変遷の後，現在では複数の教員が倉谷賞候補としてのふさわしさを示す 6 つの言葉：該当せず，不十分，容認できる，まずまず，良い，非常に良い，で評価を表明し，学生が受けた複数の評価の中央値をもってその学生の総合評価とし，総合評価の上位の若干名から成績を加味して候補を選ぶという方法をとっています．発表した学生の中には自分が指導した学生がおり，指導教員である自分がその学生を最も適切に評価できるとの思いはどの教員も多少なりとも共有しています．指導学生の総合評価が自分のつけた評価よりも低くなりそうなら，なんとか引き上げてあげたいという思いがよぎります．ときには，教育的配慮からその逆のこともあるかもしれません．

本稿では上で述べたような場面で総合評価を導く方法がもつべき性質とはどのようなものかを考えてみます．さらにそのような性質をもつ方法はあるのか，あるのならどのようなものかを導きます．副題「割れた評価をまとめれば上手くいく」をご覧になって「当たり前のことを」とお思いかもしれませんが，途中の面倒な箇所を読み飛ばしながらで結構ですから，「8. 集約関数を実現する手順」までお読みいただければ，副題の意味を納得していただけると思います．

やまもと　よしつぐ
静岡大学学術院工学領域 客員教授
〒 432–8561 静岡県浜松市中区城北 3–5–1
yamamoto@sk.tsukuba.ac.jp

2. Majority Judgment

本誌 2012 年 6 月号の記事「1 人 1 票から Majority Judgment へ」(pp. 295–301) を振り返ることから始めようと思います．Majority Judgment とは Balinski と Laraki がその著書 *Majority Judgment: Measuring, Ranking, and Electing* [2] やそれに先立つ何編かの論文で提案し，社会実験まで行った評価の方法です．評価される対象を**候補者**と呼び，評価する側を**審査員**と呼び，n 人の審査員の全体を $J = \{1, 2, \ldots, j, \ldots, n\}$ で表します．Majority Judgment では，各審査員はあらかじめ決められた**評価語**を用いて候補者に対する評価を表明します．この評価語の集まりを**評価語彙**といい $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ と書くことにします．たとえば $\Lambda = \{D, C, B, A\}$ です．評価語の間には $D \prec C \prec B \prec A$ のように**順序** $\preceq$ があります．Λ の要素は昇順に $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \cdots \prec \lambda_m$ と並んでいるとしておきます．また最低評価 λ_1 を α で，最高評価 λ_m を ω で表すことにします．

各候補者に与えられた複数の評価を何らかの方法でその候補者の総合評価に集約し，総合評価を比較することによって候補者に順序をつけたり，最も好ましい候補者を選んだりします．ここで問題になるのは複数の審査員が与えた評価をどのように 1 つの総合評価に集約するかです．つまり n 人の審査員の与えた評価を行ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表したとき

$$\Lambda_J \ni \boldsymbol{x} \to \boxed{\;f\;} \to f(\boldsymbol{x}) \in \Lambda$$

というように総合評価 $f(\boldsymbol{x})$ を与える**集約関数** (aggregation function) $f\colon \Lambda_J \to \Lambda$ はどうあるべきかが問題となります．ここで Λ_J は n 人の審査員の与える評価の行ベクトルの全体です．

3. 集約関数がもつべき性質

もうしばらく「1 人 1 票…」からの引用を続けて，集約関数がもつべきであると考えられる 4 つの性質を説明します．

3.1 4 つの要請

初めの匿名性は，どの審査員がどの評価を表明したかではなく，全体としてどのような評価の組合せが表明されたかによって総合評価が決定されるという要請です．審査員の平等性の観点から落とすことのできない要請です．

要請 3.1 (匿名性)**.** 集約関数 f は，任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Lambda_J$ と J の任意の置換 τ に対して

$$f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

を満たす．

次の全員一致性は，もしも審査員が異口同音に同じ評価を表明したなら総合評価はそれに一致しなくてはならないという要請です．

要請 3.2 (全員一致性)**.** 集約関数 f は，任意の $x \in \Lambda$ に対して

$$f(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n}) = x$$

を満たす．

次の単調性は，全審査員がその評価を上げるか，あるいは変更しない場合には総合評価は下がらない，さらに全審査員がその評価を上げた場合には総合評価も上がるというものです．

要請 3.3 (単調性)**.** 集約関数 f は，任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Lambda_J$ と $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in \Lambda_J$ に対して

弱単調性：$x_1 \succeq x'_1, x_2 \succeq x'_2, \ldots, x_n \succeq x'_n$ ならば $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succeq f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$

強単調性：$x_1 \succ x'_1, x_2 \succ x'_2, \ldots, x_n \succ x'_n$ ならば $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$

を満たす．

少し強そうな強単調性を除けば，以上の 3 つは妥当な要請だと思えます．

4 つ目の要請を説明するために戦略的操作を定義しましょう．総合評価よりも高い評価を表明している審査員 j がいるとします．つまり

$$x_j \succ f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \tag{1}$$

です．この審査員 j は，自分が表明した評価よりも総合評価が低いのですから，表明を変更して総合評価を引き上げる動機をもちます．このときこの審査員がその評価を x_j から r に変更することによって，総合評価を引き上げることができるとき，集約関数はこの審査員によって**戦略的に操作される**といいます．また

$$x_j \prec f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

の場合には総合評価を引き下げることができるときに戦略的に操作されるといいます．評価ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ において審査員 j が表明した評価を x_j から r に置き換えた評価ベクトル $(x_1, \ldots, x_{j-1}, r, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ を

$$\boldsymbol{x} /_j\, r$$

と書くことにしますと，戦略的操作は以下のように定義されます．

定義 3.4 (戦略的操作)**.** 集約関数 f が審査員 j によって $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Lambda_J$ の下で戦略的に操作されるとは

$x_j \succ f(\boldsymbol{x})$ であり
$f(\boldsymbol{x} /_j\, r) \succ f(\boldsymbol{x})$ となる $r \in \Lambda$ が存在する

あるいは

$x_j \prec f(\boldsymbol{x})$ であり
$f(\boldsymbol{x} /_j\, r') \prec f(\boldsymbol{x})$ となる $r' \in \Lambda$ が存在する

ことをいう．

このような戦略的操作を許す集約関数は審査員に評

価を偽る動機を与えてしまうため，

要請 3.5（**戦略的操作耐性**）**.** 集約関数 f は戦略的に操作されない.

ことが要請されます.

以上が Balinski と Laraki の 4 つの要請です.

3.2 順位関数

前掲の 4 つの要請を満たす集約関数は実は次に定義する順位関数しかないことが示されます．順位関数は以下のように定義される関数です.

定義 3.6. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Lambda_J$ の要素を Λ の順序 $\preceq$ で昇順に並べ[1]，その k 番目を出力する関数を **k-順位関数** (k-th order function) といい，以降 ψ_k で表す．特に k を明示する必要のない場合には単に**順位関数**と呼ぶ.

Balinski と Laraki が示した主定理は次のようになります.

定理 3.7（[2] Theorem 10.1, p.191）**.** 匿名性，全員一致性，単調性，戦略的操作耐性に加えて連続性[2]を満たす集約関数は順位関数に限られる.

順位関数が要請された 4 つの性質を満たすことは明らかですが，戦略的操作耐性について補足しておきます．記号の節約のために $x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n$ と番号が付けられているとして ψ_k について (1) が成り立っていると仮定します．つまり

$$x_j \succ \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k$$

と仮定します．そうすると $j > k$ です．ここで，x_j を r に変更すると ψ_k の定義から

$$\begin{aligned} r \prec x_j \text{ なら } \psi_k(\boldsymbol{x} /_j r) \preceq \psi_k(\boldsymbol{x}), \\ r \succ x_j \text{ なら } \psi_k(\boldsymbol{x} /_j r) = \psi_k(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

です．いずれの場合にも $\psi_k(\boldsymbol{x} /_j r)$ を $\psi_k(\boldsymbol{x})$ から引き上げることができません．同様に

$$x_j \prec \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k$$

の場合には引き下げることができません．よって ψ_k は戦略的操作耐性をもっていることがわかります.

この定理で注目すべきは，順位関数以外には要請された 4 つの性質（連続性を含めれば 5 つ）をもつ集約関数はないと述べている点です.

4. 順位関数の問題点

しかし順位関数には以下の 2 つの問題点が残されています.

4.1 k の値は？

前節の定理 3.7 は順位関数の k の値については何も語っていません．$k = 1$ なら審査員が表明した評価の最低のものが総合評価となり，$k = n$ なら最高の評価が総合評価となりますが，どのような k の値が望ましいか不明です[3].

4.2 評価が割れたら？

さらに，たとえば $\Lambda = \{D, C, B, A\}$ で，4 人の審査員の 2 人が評価 D を，2 人が評価 A を表明した場合にも順位関数は総合評価として D あるいは A を返すことになり，決して C や B を選びません．つまり評価が割れた場合に折衷的な評価を総合評価とすることがないのです.

5. 施設配置問題

Moulin [3] の施設配置問題に対する研究が順位関数の問題点解決への糸口を与えています．彼は直線上の都市に住み単峰な効用関数をもつ住民が公共施設の設置場所を決定する問題を扱い，彼の *generalized majority relation* がいくつかの望ましい条件を満たす唯一の集約関数であることを示しています．Moulin も指摘しているように，この結果は有限の評価語彙によって評価を表明する本稿の問題に素直に適用可能です．以下では彼の議論を参考にして Balinski と Laraki が要請している性質を少しだけ緩和することによって前掲の問題点が解決できることを [4] に沿って示そうと思います．なお，Jennings の学位論文 [5] にも同様の問題についての議論があります.

6. 中位関数

前に触れたように Balinski と Laraki の設定のなかでは強単調性が強すぎる要請に思えます．ここで強単調な集約関数は全員一致性をもつことを見ておきましょう．実際，強単調なら

---

[1] [2] では降順に並べて定義されていますが，以降の議論の都合で本稿では昇順とします.

[2] 補足に示すように，連続性を仮定する必要がありませんので，連続性の定義は割愛しました.

[3] [2] には k を決めるためのさまざまな議論が書かれています.

$$f(\lambda_1, \lambda_1 \ldots, \lambda_1) \prec f(\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2) \prec \cdots \prec f(\lambda_m, \lambda_m, \ldots, \lambda_m)$$

ですから $f(\lambda_i, \lambda_i, \ldots, \lambda_i)$ は Λ の相異なる評価語でなければなりませんので，$i = 1, 2, \ldots, m$ について $f(\lambda_i, \lambda_i, \ldots, \lambda_i) = \lambda_i$ となります．よって以降では強単調性と全員一致性を要請から外して，匿名性，弱単調性，戦略的操作耐性だけを残して議論を進めようと思います．

奇数 $2h-1$ 個の評価が h-順位関数 ψ_h に入力されると，その中央値が返ってきます．実際 $x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_{2h-1}$ と番号を付け直せば

$$\boldsymbol{x} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_{h-1}}_{h-1}, x_h, \underbrace{x_{h+1}, \ldots, x_{2h-1}}_{h-1})$$

です．Moulin によって**中位関数** (median function) と名づけられたこの場合の順位関数を以降では med と表記します．次の補題はいくつかの追加的な評価語を含んだ中位関数が匿名性，弱単調性，戦略的操作耐性をもっているといっています．

補題 6.1. $n + p$ が奇数となるように任意に p を選び，さらに p 個の評価語を任意に選んで $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1})$ とする．このとき中位関数によって

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma})$$

と定義される関数 f は匿名性，弱単調性，戦略的操作耐性をもつ．

審査員の人数 n が奇数であれば追加の評価語がなくてもこの補題は成り立ちます．確かに補題は $n + p$ が奇数であれば任意に p を選んでよいといっています．

翻って，匿名性，弱単調性，戦略的操作耐性をもつ集約関数は補題 6.1 のこの関数に限られるのかとの疑問が起こってきます．そして，もしもそうなら，そのときの p の大きさはどれくらいか，さらに選ばれるべき p 個の評価語 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$ はどのような評価語かという疑問も起こってきます．

その疑問に答えるためにまず審査員が 1 名の場合を考えてみると次の補題が得られます．ここで $\alpha = \lambda_1$, $\omega = \lambda_m$ であったことを思い出してください．

補題 6.2. $n = 1$ とし，$f : \Lambda \to \Lambda$ を弱単調な集約関数とし，$\gamma_0 = f(\alpha)$, $\gamma_1 = f(\omega)$ とする．このとき f が戦略的操作耐性をもつための必要十分な条件は

$$f(x) = \mathrm{med}\bigl(x, \gamma_0, \gamma_1\bigr)$$

と書けることである．

証明. 十分性は明らかです．必要性の証明は，とても簡単なのですが，最後の補足に回します． □

審査員が 1 人の場合の総合評価は，審査員の評価 x に加えて，最低評価 α と最高評価 ω が表明されたときの総合評価 $\gamma_0 = f(\alpha)$ と $\gamma_1 = f(\omega)$ の三者の中央値で与えられることになります．もしも $f(\alpha) = \alpha$ で $f(\omega) = \omega$ なら $f(x) = \mathrm{med}\bigl(x, \gamma_0, \gamma_1\bigr) = \mathrm{med}\bigl(x, \alpha, \omega\bigr) = x$ となります．ただし，今は全員一致性（といっても審査員は 1 人ですが）を仮定してませんから $f(\alpha) = \alpha$ とは限らないことに注意してください．同様に $f(\omega)$ は ω でないかもしれません．たとえば，適当に評価語 $\beta \in \Lambda$ を選んで，審査員が表明した評価にかかわらずこの β を総合評価として返す集約関数は弱単調性，戦略的操作耐性をもちます．その場合は $f(\alpha) = f(\omega) = \beta$ ですから，補題が主張するように

$$\mathrm{med}\bigl(x, f(\alpha), f(\omega)\bigr) = \mathrm{med}(x, \beta, \beta) = \beta = f(x)$$

が成り立ちます．

7. 一般の場合の集約関数

補題 6.2 は，弱単調で戦略的操作耐性をもつ集約関数は，評価 x にいくつかの評価語を補ったものの中央値で与えられると述べています．しかも，補うべき評価語は α や ω のような「極端な評価」が表明されたときの関数 f 自身が返す評価です．この構造は審査員の人数が増えた場合にも変わりません．

7.1 集約関数の存在とその形

審査員が複数人いる場合には「極端な評価」とはどのようなものでしょうか．それは審査員それぞれが α か ω のいずれかを表明している状況です．これは全員が α を表明している状況，全員が ω を表明している状況に加えて，意見が大きく割れた状況を含んでいます．つまり $n-k$ 個の α と k 個の ω からなるベクトル

$$\boldsymbol{\lambda}^k = (\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n-k}, \underbrace{\omega, \ldots, \omega}_{k}) \in \Lambda_J \qquad (2)$$

が n 人の審査員が表明した評価ベクトルである場合です．その結果得られるのは以下の定理です．

定理 7.1 ([4] Theorem 5.1). $f : \Lambda_J \to \Lambda$ を匿名

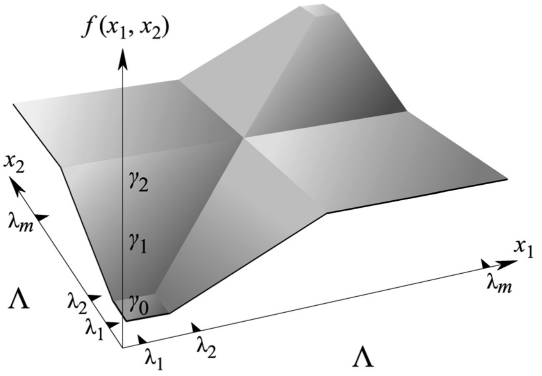

図 1　審査員が 2 名の場合の集約関数 f

性，弱単調性，戦略的操作耐性をもつ集約関数とする．$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ を (2) の $\boldsymbol{\lambda}^k$ によって

$$\gamma_k = f(\boldsymbol{\lambda}^k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{3}$$

で定義すると，

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma}\big)$$

が任意の $\boldsymbol{x} \in \Lambda_J$ で成り立つ．

証明.　審査員が 1 人の場合には定理の主張をすでに確かめました．一般の人数の場合の帰納法による証明の流れは最後の補足を見てください．　□

ここでは $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ をその構成のされ方と役割を考えて**調停評価**と名づけることにします．審査員が 2 名の場合の集約関数は図 1 のような形になります．この図から匿名性，弱単調性，戦略的操作耐性を読み取っていただければ幸いです．

8.　集約関数を実現する手順

定理 7.1 の集約関数 f に興味をもっていただいて使ってみようとお思いの方のために，例を使って実施の手順を説明します．審査員の人数は 5 名，評価語は D, C, B, A の 4 つとします．$\alpha = D, \omega = A$ ですから式 (2) の $\boldsymbol{\lambda}^k$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^0 &= (D, D, D, D, D), & \boldsymbol{\lambda}^3 &= (D, D, A, A, A) \\ \boldsymbol{\lambda}^1 &= (D, D, D, D, A), & \boldsymbol{\lambda}^4 &= (D, A, A, A, A) \\ \boldsymbol{\lambda}^2 &= (D, D, D, A, A), & \boldsymbol{\lambda}^5 &= (A, A, A, A, A) \end{aligned}$$

です．それぞれについて審査員の間でどのような総合評価が望ましいかを合意して，調停評価 $\boldsymbol{\gamma}$ を $\gamma_0 \preceq \gamma_1 \preceq \cdots \preceq \gamma_n$ となるように決めます．たとえば以下のように決めることにしましょう．

$$\boldsymbol{\gamma} \quad : \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= d, & \gamma_3 &= b \\ \gamma_1 &= c, & \gamma_4 &= b \\ \gamma_2 &= c, & \gamma_5 &= a \end{aligned}$$

ここでは実際に表明された評価から調停評価 $\boldsymbol{\gamma}$ を区別するために小文字を使って書いています．

たとえば 5 名の審査員の評価が $\boldsymbol{x} = (C, C, A, A, A)$ なら総合評価は

$$\begin{aligned} \mathrm{med}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma}) &= \mathrm{med}(C, C, A, A, A, d, c, c, b, b, a) \\ &= \mathrm{med}(\underbrace{d, C, C, c, c}_{5}, b, \underbrace{b, A, A, A, a}_{5}) = b \end{aligned}$$

つまり B となります．また $\boldsymbol{x} = (C, C, C, A, A)$ なら

$$\begin{aligned} \mathrm{med}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma}) &= \mathrm{med}(C, C, C, A, A, d, c, c, b, b, a) \\ &= \mathrm{med}(\underbrace{d, C, C, C, c}_{5}, c, \underbrace{b, b, A, A, a}_{5}) = c \end{aligned}$$

つまり C となります．

この方法をお使いになるのなら，まず評価語を決めることから始めてください．その意味するところが審査員に共有されている評価語が望ましいと思います．Balinski と Laraki はフランスで小学校以来の成績評価に使われている言葉を用いています．また，評価語の個数が奇数だと審査員が中央に位置する評価語を使いがちになるので，偶数個にするのが望ましいと彼らの社会実験の経験から述べています．その次には，評価が割れた場合の総合評価について審査員の間で合意して調停評価 $\boldsymbol{\gamma}$ を作りましょう．あとは表計算ソフトに関数を埋め込めばでき上がりです．

実は，はじめにご紹介した筑波大学社会工学類の経営工学主専攻では調停評価を追加せず，審査員によって表明された評価の中央値を総合評価として採用しています．ただし総合評価が同点の候補者については，与えられた評価の中で総合評価より高い評価の割合と，総合評価より低い評価の割合を求めて順序づけの参考にしています．この方法については [2] の 14 章や [6] を見てください．

9.　おわりに

本稿では，望ましい集約関数が調停評価 $\boldsymbol{\gamma}$ と中位関数 med で特徴づけられること，さらに調停評価は各審査員が最低評価かあるいは最高評価を表明している場合に集約関数が返す評価であることを示しました．社

会選択理論にはいわゆる不可能性定理[4]と呼ばれる否定的な結果のみならず，実用上も役立つ豊かな成果があると思います．OR 屋としてはこの分野の成果を貪欲に学んで生かすべきだと思っています．

謝辞　何人かの方に初期の原稿に目を通していただきました．特に専修大学の高野祐一，中央大学の鮏川矩義，鉄道総合技術研究所の佐藤圭介，筑波大学の栗野盛光の各氏から貴重なコメントをいただいたことに感謝しています．

参考文献

[1] https://www.sk.tsukuba.ac.jp/College/outline/kuratani.html（2017 年 4 月 30 日閲覧）

[2] M. Balinski and R. Laraki, *Majority Judgment: Measuring, Ranking, and Electing*, MIT Press, 2010.

[3] H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press, 1988.

[4] Y. Yamamoto and Y. Zhou, "Characterization of anonymous, weakly monotonic and strategy-proof aggregation functions," Discussion Paper 1310, Department of Social Systems and Management, University of Tsukuba, August 2013, http://hdl.handle.net/2241/119694（2017 年 4 月 30 日閲覧），https://commons.sk.tsukuba.ac.jp/discussion/page/2（2017 年 4 月 30 日閲覧）

[5] A. Jennings, "Monotonicity and manipulability of ordinal and cardinal social choice functions," Ph.D. Dissertation, School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University, December 2010, https://repository.asu.edu/items/8823（2017 年 4 月 30 日閲覧）

[6] http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~yamamoto/Majority_Judgment/1._Majority_Judgment_heyoukoso.html（2017 年 4 月 30 日閲覧）

補足

証明に興味をおもちの方のために補題 6.2 と定理 7.1 の証明の流れを書いておきます．さらに Balinski と Laraki の順位関数がこれまでの議論からどのように導出されるかにも触れておきます．

補題 6.2 の証明の流れ

十分性は明らかですから，必要性を $f(x)$ と x の間の順序の 3 つの場合に分けて証明します．

$f(x) = x$ の場合には弱単調性と $\alpha \preceq x \preceq \omega$ から $f(\alpha) \preceq f(x) = x \preceq f(\omega)$ が得られ，これは $f(x) = \mathrm{med}\bigl(x, f(\alpha), f(\omega)\bigr)$ を意味します．

次に $f(x) \prec x$ の場合です．f は戦略的操作耐性をもっていますから，x を仮に ω に変更しても f が返す評価を上げることはできません．つまり $f(\omega) \preceq f(x)$ です．ここで f の弱単調性から $f(\omega) \succeq f(x)$ ですから，$f(\omega) = f(x)$ が得られます．よって $f(\alpha) \preceq f(\omega) = f(x) \prec x$ となり，これはやはり $f(x) = \mathrm{med}\bigl(x, f(\alpha), f(\omega)\bigr)$ を意味します．

残った $f(x) \succ x$ の場合も同様ですので割愛します．

定理 7.1 の証明の流れ

審査員が 1 人の場合には定理の主張が正しいことをすでに確かめましたので，以下に審査員の人数 n についての帰納法による証明の流れを示します．

人数が n 以下の場合に定理の主張が正しいとの帰納法の仮定を置いて，人数が $n+1$ の場合を考えます．各 $x_0 \in \Lambda$ に対して τ_{x_0} を

$$\tau_{x_0}(\boldsymbol{x}) = f(x_0, \boldsymbol{x})$$

で定義しますと，τ_{x_0} は n 人の審査員がいる場合の 3 つの要請を満たしている集約関数となりますから，$k = 0, 1, \ldots, n$ について

$$\gamma_k(x_0) = \tau_{x_0}(\boldsymbol{\lambda}^k) = f(x_0, \boldsymbol{\lambda}^k)$$

とすれば，帰納法の仮定から

$$\tau_{x_0}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\bigl(\boldsymbol{x}, \gamma_0(x_0), \gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_n(x_0)\bigr)$$

が成り立ち，よって τ_{x_0} と $\gamma_k(x_0)$ の定義を代入すれば

$$\begin{aligned} &f(x_0, \boldsymbol{x}) \\ &= \mathrm{med}\bigl(\boldsymbol{x}, f(x_0, \boldsymbol{\lambda}^0), f(x_0, \boldsymbol{\lambda}^1), \ldots, f(x_0, \boldsymbol{\lambda}^n)\bigr) \end{aligned} \tag{4}$$

が得られます．次に

$$\sigma_{\boldsymbol{x}}(x_0) = f(x_0, \boldsymbol{x})$$

とすると，補題 6.2 から

$$\begin{aligned} f(x_0, \boldsymbol{x}) &= \sigma_{\boldsymbol{x}}(x_0) \\ &= \mathrm{med}\bigl(x_0, \sigma_{\boldsymbol{x}}(\alpha), \sigma_{\boldsymbol{x}}(\omega)\bigr) \\ &= \mathrm{med}\bigl(x_0, f(\alpha, \boldsymbol{x}), f(\omega, \boldsymbol{x})\bigr) \end{aligned}$$

が得られます．よって (4) の右辺にある $f(x_0, \boldsymbol{\lambda}^k)$ は $f(x_0, \boldsymbol{\lambda}^k) = \mathrm{med}\bigl(x_0, f(\alpha, \boldsymbol{\lambda}^k), f(\omega, \boldsymbol{\lambda}^k)\bigr)$ ですから，これを代入すると

$$f(x_0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}, \\ \mathrm{med}\bigl(x_0, f(\alpha, \boldsymbol{\lambda}^0), f(\omega, \boldsymbol{\lambda}^0)\bigr), \\ \mathrm{med}\bigl(x_0, f(\alpha, \boldsymbol{\lambda}^1), f(\omega, \boldsymbol{\lambda}^1)\bigr), \\ \vdots \\ \mathrm{med}\bigl(x_0, f(\alpha, \boldsymbol{\lambda}^n), f(\omega, \boldsymbol{\lambda}^n)\bigr) \end{pmatrix}$$

[4] この定理を証明したノーベル経済学賞受賞者である Kenneth Arrow 博士が 2017 年 2 月 21 日に 95 歳で他界されました．

が得られます．ここで，右辺の f の変数が，たとえば $(\alpha, \boldsymbol{\lambda}^0) = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ や $(\omega, \boldsymbol{\lambda}^0) = (\omega, \alpha, \ldots, \alpha)$ のように α と ω だけからできていることに注意して，$\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ と $\gamma_{(k)}$ を $k = 0, 1, \ldots, n$ については

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k)} = (\alpha, \boldsymbol{\lambda}^k) = (\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n+1-k}, \underbrace{\omega, \ldots, \omega}_{k})$$
$$\gamma_{(k)} = f(\boldsymbol{\lambda}^{(k)})$$

さらに

$$\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)} = (\omega, \boldsymbol{\lambda}^n) = (\underbrace{\omega, \omega, \ldots, \omega}_{n+1})$$
$$\gamma_{(n+1)} = f(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)})$$

と定義します．つまり定理の式 (3) の $n+1$ 人版です．弱単調性とこの作り方から $\gamma_{(0)} \preceq \gamma_{(1)} \preceq \cdots \preceq \gamma_{(n)} \preceq \gamma_{(n+1)}$ となっていることを覚えておいてください．そうすると

$$f(x_0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}, \\ \mathrm{med}\bigl(x_0, \gamma_{(0)}, \gamma_{(1)}\bigr), \\ \mathrm{med}\bigl(x_0, \gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}\bigr), \\ \vdots \\ \mathrm{med}\bigl(x_0, \gamma_{(n)}, \gamma_{(n+1)}\bigr) \end{pmatrix}$$

が得られます．かなり目標に近づいてきました．次に右辺の二重になった med を解きほぐすために x_0 に注目して $x_0 \preceq \gamma_{(0)}$ なる場合と $\gamma_{(n+1)} \preceq x_0$ なる場合と，さらにある l について $\gamma_{(l)} \prec x_0 \preceq \gamma_{(l+1)}$ となる場合の 3 つの場合に分けます．

$x_0 \preceq \gamma_{(0)}$ なら $k = 0, 1, \ldots, n$ について

$$\mathrm{med}\bigl(x_0, \gamma_{(k)}, \gamma_{(k+1)}\bigr) = \gamma_{(k)}$$

ですから，

$$f(x_0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\bigl(\boldsymbol{x}, \gamma_{(0)}, \gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(n)}\bigr)$$

が得られます．ここで $\gamma_{(0)}, \gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(n)}$ の個数は $n+1$ 個，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の個数は n 個であることに注意すると $\gamma_{(0)} \preceq \mathrm{med}\bigl(\boldsymbol{x}, \gamma_{(0)}, \gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(n)}\bigr) \preceq \gamma_{(n)}$ がわかります．したがって $x_0 \preceq \gamma_{(0)}$ なる x_0 と $\gamma_{(n)} \preceq \gamma_{(n+1)}$ なる $\gamma_{(n+1)}$ を追加しても中位関数 med は同じ評価を返しますので，

$$f(x_0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\bigl(x_0, \boldsymbol{x}, \gamma_{(0)}, \gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(n)}, \gamma_{(n+1)}\bigr)$$

が導かれます．$\gamma_{(n+1)} \preceq x_0$ の場合も同様です．

最後の $\gamma_{(l)} \prec x_0 \preceq \gamma_{(l+1)}$ となる場合は $k = 0, 1, \ldots, l-1$ について

$$\mathrm{med}\bigl(x_0, \gamma_{(k)}, \gamma_{(k+1)}\bigr) = \gamma_{(k+1)}$$

であり

$$\mathrm{med}\bigl(x_0, \gamma_{(l)}, \gamma_{(l+1)}\bigr) = x_0$$

さらに $k = l+1, \ldots, n$ について

$$\mathrm{med}\bigl(x_0, \gamma_{(k)}, \gamma_{(k+1)}\bigr) = \gamma_{(k)}$$

となりますので

$$f(x_0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\bigl(x_0, \boldsymbol{x}, \gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(l)}, \ldots, \gamma_{(n)}\bigr)$$

が得られます．中位関数の性質から $\gamma_{(0)} \preceq \gamma_{(1)}$ である $\gamma_{(0)}$ と $\gamma_{(n)} \preceq \gamma_{(n+1)}$ である $\gamma_{(n+1)}$ を追加しても中位関数 med は同じ評価を返しますので，最終的に

$$f(x_0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{med}\bigl(x_0, \boldsymbol{x}, \gamma_{(0)}, \gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(n)}, \gamma_{(n+1)}\bigr)$$

が導かれます．

Balinski と Laraki の順位関数の導出

定理 7.1 の条件に加えて，強単調性をもつ集約関数は Balinski と Laraki の順位関数となることを示しておこうと思います．まず，強単調性を追加すると 6 節で見たように全員一致性をもちますから $\gamma_0 = \alpha$ かつ $\gamma_n = \omega$ となります．さらにほかの γ_k も α あるいは ω であることが導けます．実際，α でも ω でもない γ_k があったとして

$$\boldsymbol{x} = (\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n-k}, \underbrace{\gamma_k, \ldots, \gamma_k}_{k})$$
$$\boldsymbol{x}' = (\underbrace{\gamma_k, \ldots, \gamma_k}_{n-k}, \underbrace{\omega, \ldots, \omega}_{k})$$

とすると強単調性から $f(\boldsymbol{x}) \prec f(\boldsymbol{x}')$ が得られます．一方 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma})$ と $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\gamma})$ には γ_k がそれぞれ $k+1$ 個，$n-k+1$ 個含まれることに注意して並べ直すと

$$\begin{aligned}\mathrm{med}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathrm{med}(&\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n-k}, \underbrace{\gamma_0, \ldots \gamma_{k-1}}_{k}, \underline{\gamma_k}, \\ &\underbrace{\gamma_k, \ldots, \gamma_k}_{k}, \underbrace{\gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n}_{n-k})\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{med}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\gamma}) = \mathrm{med}(&\underbrace{\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}}_{k}, \underbrace{\gamma_k, \ldots, \gamma_k}_{n-k}, \underline{\gamma_k}, \\ &\underbrace{\gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n}_{n-k}, \underbrace{\omega, \ldots, \omega}_{k})\end{aligned}$$

はいずれも下線を施した γ_k となることがわかって，先ほどの $f(\boldsymbol{x}) \prec f(\boldsymbol{x}')$ に矛盾することになります．よって

$$\gamma_k = \begin{cases} \alpha & 0 \leq k \leq l \text{ の場合} \\ \omega & l+1 \leq k \leq n \text{ の場合} \end{cases}$$

となる l が存在します．ここで $0 \leq l \leq n-1$ であることに注意してください．番号を付け直して $x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n$ としておくと，γ_k が α あるいは ω に等しいことから $f(\boldsymbol{x})$ は

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{med}(\boldsymbol{x}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{l+1}, \underbrace{\omega, \ldots, \omega}_{n-l}) \\ &= \mathrm{med}(\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha, x_1, \ldots, x_{n-l-1}}_{n}, \\ &\qquad x_{n-l}, \underbrace{x_{n-l+1}, \ldots, x_n, \omega, \ldots, \omega}_{n}) \\ &= x_{n-l} \end{aligned}$$

で与えられます．以上の結果は，f が $(n-l)$-順位関数であることを示しています．

