

# 対戦型集団スポーツの数理

## —サッカーを題材に—

成塚 拓真

スポーツ統計科学における主要な研究対象は対戦型集団スポーツである。中でも、トラッキングデータの取得が世界的に進むサッカーは特にホットな分野となっている。しかし、フィールド上で選手同士が直接的にコンタクトを行うことから、その解析には従来のスポーツ科学やスポーツ統計を超えた新たな枠組みが必要である。本稿では、トラッキングデータを用いた対戦型集団スポーツの解析法および解析事例をサッカーを例にとって紹介する。特に、チーム全体の集団運動から相手選手との相互作用まで、階層ごとに異なる特徴量に着目し、そこで見られる統計的な性質を抽出する。

キーワード：対戦型集団スポーツ、サッカー、トラッキングデータ、集団運動、選手間相互作用、フォーメーション

### 1. はじめに

スポーツを科学するという試みには長い歴史がある。中でも、スポーツバイオメカニクス、スポーツ生理学、スポーツ医学、スポーツ心理学などの諸分野で得られた知見は、現在、選手の競技力向上に欠かせないものとなっている [1]。ただし、こうした知見がすべてのスポーツに適用可能なわけではない。たとえば、スポーツバイオメカニクスが対象とするのは歩、走、跳、蹴、打、投などの個別の動作であり、野球やサッカーなどの戦術の理解に直接役立つとは思えない。

野球、サッカー、テニス、フェンシングなどの、いわゆる対戦型スポーツでは、選手同士の激しい相互作用が蓄積され、結果的に試合の流れや戦況変化を生み出す。そこでは、個別の動作の解析よりも、むしろ統計的なアプローチが力を発揮する。“スポーツ統計科学”の出番である。これまでに、スポーツ統計科学の手法が最も成功を収めたのは野球である。事実、1970年代に B. James によって創始されたセイバメトリクスの体系はこの分野の端緒となり、2000年代以降、メジャーリーグを中心に急速に実用化されている [2, 3]。

一方、フィールド上で選手同士が直接的にコンタクトを行うサッカーなどの集団スポーツについては、理論的にも実践的にも未だ発展途上である。そもそも、ほんの数年前まで、競技の解析に必要なデータを取得することすら難しかった。しかし、近年の測定技術の進歩は目覚ましく、こうした状況は急速に改善されつ

つある。特に、選手の位置データ（トラッキングデータ）の取得が世界的に行われるようになったサッカーやバスケットボールは、今やスポーツ統計科学におけるホットな分野となっている。本稿でも、データスタジアム株式会社から提供されたサッカー J1 リーグのトラッキングデータを用い、対戦型集団スポーツの解析手法および解析事例を紹介する。

『サッカーマティクス』の著者 D. Sumpter は「野球が統計のスポーツだとすれば、サッカーはパターンのスポーツだ」と指摘している [4]。対戦型集団スポーツの研究を行ううえで、この指摘は重要だ。すなわち、野球において打率や防御率などの個々の選手の数字が重視されるのに対し、サッカーではパスのネットワークやフォーメーションなどのチームワークが重要な意味をもつ。実際、これまでも、得点変動のパターン解析 [5–7]、パス回しのネットワーク解析 [8]、フォーメーションの解析 [9]、ボールの動きのフラクタル解析 [10] など、「パターン」に着目した解析が度々行われている（詳しくは文献 [4, 11] を参照）。本稿では、サッカーで見られる選手間相互作用や集団運動に焦点を当て、そこに現れるパターンを階層的に特徴づけてみたい。

### 2. データ

#### 2.1 トラッキングデータ

以下の解析では、J1 リーグで取得された選手のトラッキングデータ、および、ボールタッチデータを用いる。これらのデータは、データスタジアム株式会社によって独自に取得されたもので、詳細は以下のとおりである。まず、トラッキングデータには、0.04 秒ごとに取得された（審判を含む）全選手の位置座標が含

なりづか たくま  
中央大学理工学部物理学科  
〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27  
pararel@gmail.com

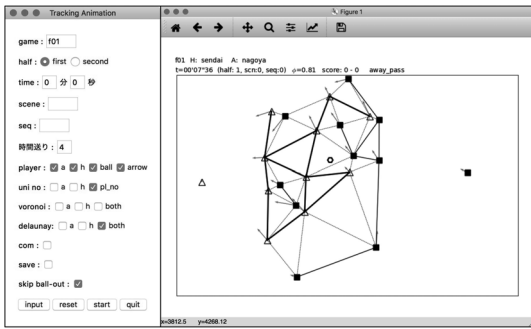


図1 python のモジュール “matplotlib” を用いて作成したトラッキングデータの可視化システム

まれている。位置座標は、各スタジアムに取り付けられた複数台のカメラによって自動的に取得され、その後、手動による補正が成されている。なお、ボールの位置データも含まれてはいるが、実用に耐えうる精度のデータではない。次に、ボールタッチデータには、ボール受け渡し時の各選手の位置座標、および、そのほかのさまざまな付加情報が含まれている。このデータに含まれる（パスが行われた時刻の）ボールの位置情報をトラッキングデータと組み合わせることで、およそのボールの軌跡を再現することが可能である。

本稿で紹介する解析事例は、2015 年度および2016 年度に J1 リーグで行われた 59 試合のデータに基づいている<sup>1</sup>。これらのデータの加工、解析、可視化は、すべて python のパッケージ (numpy, scipy, pandas, networkx, scikit-learn, matplotlib) を用いて行った。図 1 に示したのは、matplotlib を用いて作成したトラッキングデータの可視化システムである。アニメーションの表示画面には各選手の位置のほかに、ボールの位置、各チームの重心、慣性半径、秩序変数、ボロノイ領域、ドロネーネットワークなどを表示することができる（これらの特徴量の詳細については 3 節で述べる）。また、アニメーションの開始位置は自由に設定でき、一時停止、コマ送り、早送り、スロー再生、アクション単位での切り替えにも対応している。アニメーションを保存することも可能である。このシステムを用いれば、シーンごとに選手の動きの評価やチームの連携度合い、スペースの活用の仕方などを分析することができる。チームの監督が選手に対してフィードバックを行う際にも役立つだろう。

<sup>1</sup> これらのデータはスポーツデータ解析コンペティション（統計学会スポーツ統計分科会主催）に参加することで無料貸与された。

## 2.2 階層性について

対戦型集団スポーツの解析では、注目する時空間スケールに応じて、用いるべき特徴量や解析手法が異なる。たとえば、試合全体でのおおまかな試合展開を捉えるには得点変動に着目するのがよいが、個々の選手の特徴を見たい場合には速度や加速度の情報が必要となる。そこで、まずは、対戦型集団スポーツにおける時空間スケールの階層性について、サッカーを例に考えてみよう。

サッカーのデータ解析では、主に、時間と構成要素という二つのスケールに着目する必要がある。ここでは、時間と構成要素のそれぞれを、次のような三つの階層に分けることにする。まず、時間については、ミクロ、メゾ、マクロの階層を考える。直感的には、数秒単位の時間スケールがミクロ、ターンオーバーまでの一連の時間帯など数分単位での時間スケールがメゾ、試合全体を見渡すような時間スケールがマクロである。一方、構成要素については、1 体、2 体、多体の階層を考える。具体的には、各選手の位置や速度に着目する場合は 1 体、選手間相互作用に着目する場合は 2 体、チーム全体のフォーメーションなどに着目する場合は多体である。

このように、集団球技を階層に分けて考えると、表 1 のような九つのカテゴリーを設定でき、各階層で用いるべき特徴量や解析手法が明確になる。表 1 に示したのは、これまでに筆者が取り組んできた解析の一例である。以下でそのいくつかを紹介しよう。

## 3. チームの重心・慣性半径・秩序変数

まずは、個々の選手の位置や速度は無視し、チーム全体でのおおまかな振る舞いに着目しよう。そのために、時刻  $t$  における選手  $j$  の位置座標  $\mathbf{r}_j(t)$ 、速度  $\mathbf{v}_j(t)$  を用いて、チームの重心  $\mathbf{R}_c(t)$ 、慣性半径（標準偏差） $\sigma(t)$ 、秩序変数  $\phi(t)$  を以下のように定義する：

$$\mathbf{R}_c(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j(t),$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\mathbf{R}_c(t) - \mathbf{r}_j(t)|^2},$$

$$\phi(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{v}_j(t)}{|\mathbf{v}_j(t)|} \right|.$$

これらの量は単位時間ごと（ここでは 0.04 秒ごと）に

表 1 サッカーにおける階層性とカテゴリー

	1 体	2 体	多体
ミクロ	トラッキングデータ ボールタッチデータ	速度ベクトルの成す角 選手間距離	重心と慣性半径の相関 ドロネーネットワーク
メゾ	選手の軌道	追跡ダイナミクス	重心と慣性半径の相関 フォーメーションの遷移
マクロ	速度分布 走行距離・スプリント回数	第 $k$ 近接選手との関係 角度分布	ヒートマップ パス回しネットワーク

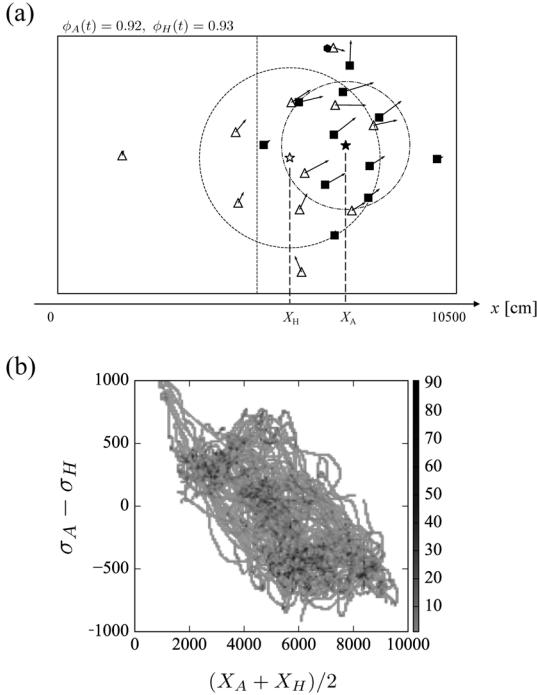


図 2 (a) ホームチーム ( $\Delta$ ) がアウェイチーム ( $\blacksquare$ ) の陣地に攻めている場面, (b) 2 チームの重心位置の midpoint の  $x$  座標の midpoint (横軸) と慣性半径の差 (縦軸) の関係図

各チームに対して定義される。また、 $N = 10$  はキーパーを除く 1 チームの選手数である (本稿を通してキーパーの選手は除外する)。図 2(a) にこれらの特徴量の具体例を示す。星印 ( $\star$ ,  $\blackstar$ ) で示したのが各チームの重心、点線の円で示したのが慣性半径であり、それぞれ各チームのおおよその位置と広がりを表す。一方、秩序変数というのはあまり馴染みがないかもしれないが、これは統計物理学の分野でよく用いられ、0~1 の値で全選手の移動方向の揃い具合を表す (1 に近いほど揃っている)。図 2(a) の場面では、全選手が同じ方向に移動しており、実際、左上に示した各チームの秩序変数も 1 に近い値となっている。

さて、これらの量から簡単な統計性を抽出してみよう。図 2(b) は、2 チームの重心位置の midpoint の  $x$  座標  $X_A$ ,  $X_H$  の midpoint を横軸、慣性半径の差  $\sigma_A - \sigma_H$  を縦軸

にとり、それらの 1 試合にわたるヒートマップを示した図である。この図から、フィールド上の位置によって、2 チームの慣性半径に差が現れることがわかる。すなわち、守備側のチームよりも攻撃側のチームのほうが慣性半径が大きくなる傾向にある。このような性質は、どの試合においても共通に見られるだけでなく、これまでにバスケットボールなどほかの競技においても確認されている [12]。直感的には、選手を分散させてスペースを作ろうとする攻撃側と、ゴール前を固めようとする守備側の非対称性を反映したものと考えられ、集団球技における普遍的な性質の一つといえる。

なお、秩序変数  $\phi(t)$  を用いた解析については、後ほど 5 節で詳しく取り上げることにする。

#### 4. フォーメーション

次に、チームの広がりだけでなく、その形 (フォーメーション) にまでクローズアップしてみよう。フォーメーションは、チームの戦術を考えるうえで基本となる概念である。しかし、フォーメーションとは何かと問われると、その定義ははっきりしない。通常、フォーメーションを定量化する際に、“424” や “343” などの数字の組が用いられることから、最も単純には、選手同士の相対的な位置関係とも言えるかもしれない。また、次のような定義も与えられている [13]：

フォーメーションとは  $N$  人の選手の空間的な配置を表す  $N$  個のポジションの任意の順序集合のことである。

いずれにしても、実際にフォーメーションをもとにした試合分析を行うにはもう少し定量的な方法が必要だろう。以下では、ヒートマップに基づく方法、そして、それをさらに一歩進めたドロネーネットワーク法を紹介する [14, 15]。

##### 4.1 ヒートマップ

フォーメーションを選手同士の相対的な位置関係であると捉えると、フィールド上の位置やチームの広が

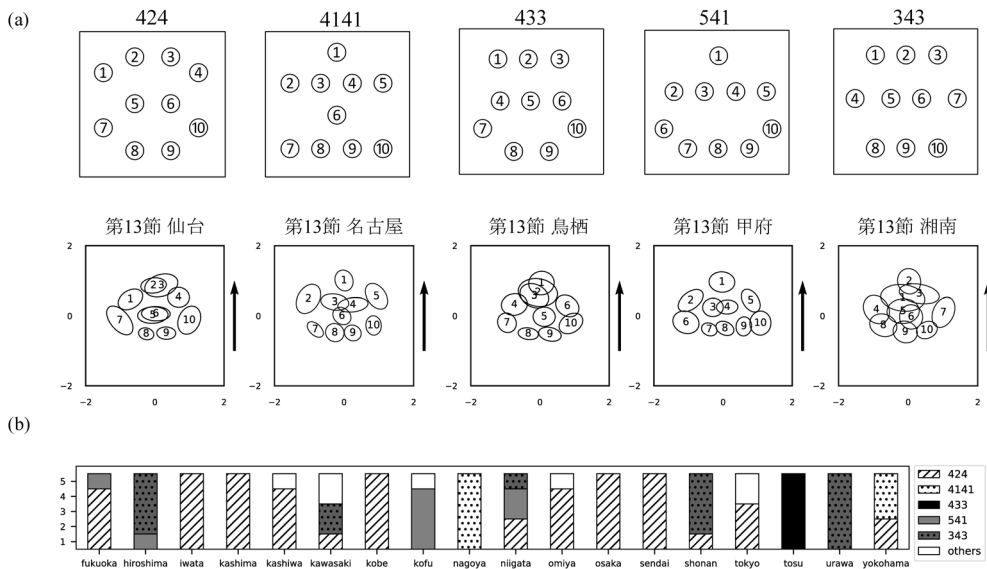


図 3 (a) 標準化した座標系における平均フォーメーションの定義とその典型例, (b) 2016 年度 J1 リーグ第 13~17 節における全チームの平均フォーメーションの分類結果

りには依存しないほうがよいだろう。そこでまず、選手  $j$  の位置座標  $\mathbf{r}_j(t)$  を 3 節で導入したチームの重心  $\mathbf{R}_c(t)$ , 慣性半径  $\sigma(t)$  を用いて次のように標準化する:

$$\tilde{\mathbf{r}}_j(t) = \frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{R}_c(t)}{\sigma(t)}.$$

図 3(a) は、標準化した座標系において、J1 リーグのチームの代表的なヒートマップを示したものである。ここで、各選手のおおまかな位置と広がりを分散共分散行列の固有値・固有ベクトルから求めた楕円によって表している [16]。このようなヒートマップを、すべてのデータセットに対して求めると、いくつかのパターンに分類できることがわかる。具体的に、図 3(a) では、“424”, “4141”, “433”, “541”, “343” の五つのパターンに分かれている (全試合のヒートマップなどの詳細は文献 [15] を参照)。ここでは、それぞれのパターンを“平均フォーメーション”と呼ぶことにしよう。通常、サッカーの試合で言及される“424”などの表記はスターティングフォーメーションを表したものであるが、実際に 1 試合全体を通して見ても、特定のフォーメーションを保っていることが定量的に確認できる。

また、図 3(b) は 2016 年度 J1 リーグの第 13~17 節の試合について、全 18 チームのヒートマップを平均フォーメーションに分類した結果である。これを見ると、5 試合を通して同じ平均フォーメーションを用いているチームもあれば、異なる平均フォーメーションにシフトしているチームもある。こうした試合間のフォーメーション変化については、ゲーム理論に基づく研究

もなされており、各チームの戦術を捉えるうえで重要である [17, 18]。

#### 4.2 ドロネーネットワーク

図 3(a) のヒートマップを見ると、各選手の楕円に重なりが生じていることがわかる。これは、試合中に選手同士で位置を入れ替えていることを意味する。こうしたフォーメーション内部での位置の入れ替えを捉えるには、ヒートマップだけでは不十分であり、具体的に誰と誰が隣り合っているかという隣接関係の情報が必要となる。

2 次元平面において隣接関係を定義する方法はいくつかあるが、基本的にはドロネー分割と呼ばれる手法が出发点となっている。これは、各選手のポロノイ領域<sup>2</sup>の隣接関係として与えられる [19]。すなわち、2 選手のポロノイ領域が互いに隣接していたらその選手同士を隣同士とみなし線で結ぶ。ドロネー分割はネットワークと捉えることができるので、図 4(a) のように、隣接選手間に 1、それ以外の選手間に 0 を割り当てた隣接行列  $A(t)$  を用いて定量化される。以下ではこれを“ドロネーネットワーク”と呼ぶことにしよう。

ドロネーネットワークもまた、選手同士の相対的な位置関係を表したものであるので、その隣接行列  $A(t)$  は時刻  $t$  におけるチームのフォーメーションを定量化

<sup>2</sup> 各選手の位置を母点と考える。ポロノイ領域とは、フィールド上のすべての位置座標をどの母点に近いかによって分割した領域のことである。直感的には、各選手の支配領域のような意味合いをもつ。

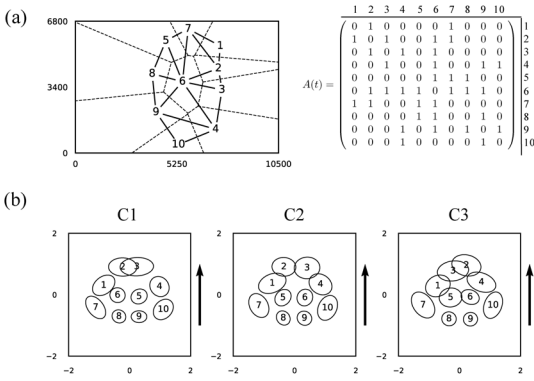


図 4 (a) ある時刻のドロネーネットワークとその隣接行列 (点線は各選手のボロノイ領域), (b) 試合中に現れたドロネーネットワークを階層的クラスタリングによって三つのクラスターに分類した結果 (ベガルタ仙台の 5 試合分)

したものとみなせる。前節で着目したヒートマップが 1 試合に渡る平均的なフォーメーションであったのに対し、ドロネーネットワークは各時刻における瞬間的なフォーメーションである。特に、隣接行列が与えられることにより、異なるフォーメーションの類似度を次のような距離として導入できるのが利点である：

$$D_{tt'} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [A_{ij}(t) - A_{ij}(t')]^2.$$

ここで、 $A_{ij}(t)$  は隣接行列  $A(t)$  の  $i, j$  成分である。

さて、フォーメーションに対して類似度が定義できると、試合中に現れるフォーメーションの分類 (クラスタリング) が可能となる。ここでは、階層的クラスタリングの手法である Ward 法 [20] を用いた分類結果を紹介しよう。階層的な方法を用いることにより、時刻ごとのフォーメーションから前節の平均フォーメーションまでを統一的に特徴づけることができる。

図 4(b) は、ベガルタ仙台の 5 試合分のデータセットを用いて、試合中に現れたすべてのドロネーネットワークをクラスターに分類した結果である。階層的クラスタリングでは、クラスターの数パラメータとして調整できるが、ここでは、クラスター数が三つの場合を示した (C1~C3 はクラスター番号)。また、各クラスターは前節と同様のヒートマップを用いて、標準化した座標系において可視化している。この図を見ると、各クラスターの違いが、2 選手の位置の入れ替えに対応していることがわかる。具体的に、C1 と C2 では選手 5 と選手 6、C2 と C3 では選手 2 と選手 3 が位置を入れ替えている。

なお、クラスター数は、フォーメーションの解像度

に対応していると考えられる。すなわち、クラスター数を大きく設定すれば、それだけ細かいパターンまでフォーメーションを区別することになり、逆にクラスター数を少なくすれば、粗視化したパターンが得られる。この意味で、前節の平均フォーメーションというのは、クラスター数が一つの場合に対応すると考えられる。実際に試合を分析する場合にも、クラスター数をコントロールすることで、数秒単位の細かいフォーメーションの変化から、数十秒単位の緩やかな変化までを特徴づけることができる。スターティングフォーメーションしか考慮していなかった従来の手法に比べると、試合分析の幅が格段に広がることは間違いないだろう。

ドロネーネットワーク法は、これ以外にもさまざまな拡張・応用が考えられる。たとえば、相手チームも含めてドロネー分割すれば、相手選手との相互作用を取り入れることができる。特に、味方同士に張られたドロネー線は安全なパスコースとみなすことができるので、戦術分析には必須の拡張である [21]。また、サッカー以外の競技またはシステムに適用するという方向性もある。たとえば、鳥や魚などの動物の群れに対して適用すれば、サッカーと共通の性質が抽出できるかもしれない。

## 5. 相手選手との向き

最後に、フォーメーションからさらに一歩進んで、選手同士の相互作用に焦点を当て、ある選手が相手選手とどのように向きを揃えているかを特徴づけてみよう。そのために、ある選手  $j$  から見て  $k$  番目に近い相手選手を第  $k$  近接選手と定義し、これら 2 選手の世界ベクトルの成す角  $\theta_{jk}(t)$  に着目する。また、角度データ  $\{\theta_{jk}(t)\}$  のばらつき (分散) を表す量として、円周分散  $V_\theta$  を用いる [22]。円周分散の定義域は  $0 \leq V_\theta \leq 1$  であり、0 に近いほど 2 選手の移動方向が揃っていることを意味する<sup>3</sup>。

まず、十分小さな  $\delta\phi$  について、3 節で定義した秩序変数が  $\phi \leq \phi(t) \leq \phi + \Delta\phi$  を満たす時刻を抽出し、それらの時刻の角度データ  $\{\theta_{jk}(t)\}$  から円周分散  $V_\theta$  を求める。そのうえで、 $V_\theta$  と  $\phi$  の関係を  $k$  の値ごとにプロットした結果が図 5(a) である。秩序変数  $\phi$  が大きいとき、円周分散の値は  $k$  によらずに小さい値となる。秩序変数が大きいということは、そもそも全選手の向きが揃った状態であるので、これは妥当な結果と

<sup>3</sup>  $\{\theta_{jk}(t)\}$  の時間平均がおおよそ 0 になることを確認している。

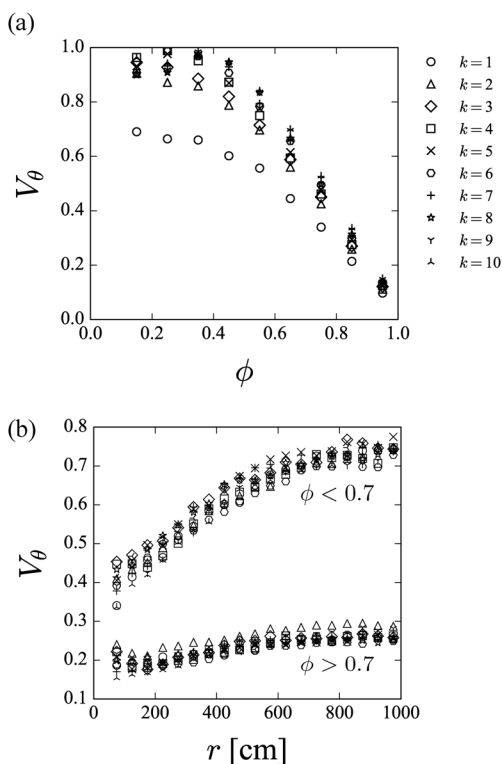


図 5 (a) 第  $k$  近接選手に対する円周分散  $V_\theta$  と秩序変数  $\phi$  の関係, (b) 秩序状態 ( $\phi > 0.7$ ) と無秩序状態 ( $\phi < 0.7$ ) における円周分散  $V_\theta$  と選手間距離  $r$  の関係 (2015 年度の 9 試合分)

いえよう。一方、秩序変数が小さいときには、 $k = 1$  だけほかの  $k$  に比べて円周分散が相対的に小さい値となる。これは、最近接選手と強く向きを揃えていることを意味し、サッカーにおけるマーキングの特性を反映した結果ではないかと考えられる。

さて、以上の結果より、最近接選手とのペアは秩序変数の大きいときと小さいときで、異なる相互作用をしていることが予想される。われわれは、こうした運動モードの違いをより詳しく特徴づけるため、最近接選手との角度のばらつき（円周分散）だけでなく、角度分布の変化まで踏み込んでみることにした。その結果の詳細は文献 [23] に譲るが、結論としては、おおよそ  $\phi \simeq 0.7$  を境に角度分布の形状が急激に変化することがわかった。そこで、 $\phi > 0.7$  を“秩序状態”、 $\phi < 0.7$  を“無秩序状態”と呼ぶことにすると、秩序状態はロングパスなどをきっかけに全選手がボールを追いかけている状態、無秩序状態は、最近接選手のマーキングをしながらボールを取り合っている状態という解釈ができる。

また、この結果を踏まえ、秩序状態と無秩序状態に

おける、円周分散  $V_\theta$  の選手間距離  $r$  に対する依存性を調べた (図 5(b))。この図で特徴的なのは、ボールを取り合っている無秩序状態 ( $\phi < 0.7$ ) において、 $r > 5$  m で一定であった円周分散が  $r < 5$  m で減少している点である。円周分散が小さくなるということは、それだけ 2 選手の向きが揃っているということなので、これは、5 m という距離が、サッカーにおいて相手選手との相互作用が強くなる（移動方向が揃い始める）特徴的距離であることを意味している。なお、選手間距離の頻度分布を  $k$  の値ごとに調べてみると、 $r < 5$  m となる頻度は最近接選手 ( $k = 1$ ) のみ高くなる。このことから、サッカーでは、最近接の相手選手と 5 m くらいの間合いをとってマーキングしていることになる。5 m という距離は、フィールドの大きさと選手の配置を考えても妥当な値ではないだろうか。

以上、相手選手との移動方向の揃い具合を方向統計の手法を用いて特徴づけてみた。将来的には、ここで明らかになった運動モードの違いを出発点として、サッカーにおける戦況変化などに迫れるのではないかと考えている。

## 6. おわりに

ここまで、チーム全体の特徴（多体問題）から出発して、相手選手との相互作用（2 体問題）まで階層的な特徴づけを試みてきた。ここからさらに選手個人の性質まで踏み込むこともできるが、これについては走行距離やスプリント回数など、おなじみの解析結果が多く、の場所で公開されているので割愛する [24]。また、われわれが取り組んだ別の解析として、選手の位置を考慮したパス回しネットワークに関する話題がある。これは、パス回しをフィールドに配置されたノード間のネットワークとみなし、その次数分布の共通性を議論したものである。詳細については、文献 [25, 26] を御覧いただきたい。

スポーツの現場におけるデータ分析の重要性が世界的に認識される中、東京五輪やラグビー W 杯を控えた日本でも、サッカーを筆頭に詳細な試合データの取得が始まっている。しかし、そうした膨大なビッグデータの山から価値ある情報を引き出せるかどうかは、また別の問題である。特に、本稿で扱った対戦型集団スポーツの分析には、従来のスポーツ科学や統計学を超えた異分野の知見が必要になると考えられる。本稿で紹介した解析事例では、筆者の専門とする統計物理学の観点から、基礎的な手法の提案と統計性の抽出を行ったが、試合の戦術分析や選手評価などの応用を見据え

ると、そうした基礎的な手法をもとにした、より実戦向きの理論体系が必要となるだろう。オペレーションズ・リサーチの手法は、こうした場面にまさにうってつけの分野ではないだろうか？ 今後、秩序変数やドロネーネットワークなどを基礎とし、そこにオペレーションズ・リサーチの手法を組み合わせれば、チームの最適な戦術やフォーメーション変化の方法がわかるかもしれない。本稿を目にした読者が、スポーツ統計科学に少しでも興味をもち、新たな視点を提供してくれると幸いである。

**謝辞** 本研究は情報・システム研究機構統計数理研究所の支援を受けたものです。本研究を行うにあたり、データを提供していただいたデータスタジアム株式会社様、議論をして頂いた山崎義弘氏（早稲田大）、山本健氏（琉球大）、國仲寛人氏（三重大）、西森拓氏（広島大）に感謝致します。

#### 参考文献

- [1] 中村敏雄, 高橋健夫, 寒川恒夫, 友添秀則 (編), 『21世紀スポーツ大事典』, 大修館書店, 2015.
- [2] J. Albert and J. Bennett (後藤寿彦監修, 加藤貴昭訳), 『メジャーリーグの数理科学』(上・下), シュプリンガー・ジャパン, 2004.
- [3] M. Lewis, *Moneyball: The art of winning an unfair game*, WW Norton & Company, 2004.
- [4] D. Sumpter (千葉敏生訳), 『サッカーマティクス—数学が解明する強豪チーム「勝利の方程式」—』, 光文社, 2017.
- [5] S. Merritt and A. Clauset, “Scoring dynamics across professional team sports: Tempo, balance and predictability,” *EPJ Data Science*, **3**, pp. 1–12, 2014.
- [6] A. Clauset, M. Kogan and S. Redner, “Safe leads and lead changes in competitive team sports,” *Physical Review E*, **91**, article number: 062815, 2015.
- [7] D. P. Kiley, A. J. Reagan, L. Mitchell, C. M. Danforth and P. S. Dodds, “Game story space of professional sports: Australian rules football,” *Physical Review E*, **93**, article number: 052314, 2016.
- [8] F. M. Clemente, F. M. L. Martins and R. S. Mendes, *Social Network Analysis Applied to Team Sports Analysis*, Springer, 2016.
- [9] A. Bialkowski, P. Lucey, P. Carr, I. Matthews, S. Sridharan and C. Fookes, “Discovering team structures in soccer from spatiotemporal data,” *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, **28**, pp. 2596–2605, 2016.
- [10] A. Kijima, K. Yokoyama, H. Shima and Y. Yamamoto, “Emergence of self-similarity in football dynamics,” *The European Physical Journal B*, **87**, article number: 41, 2014.
- [11] J. Gudmundsson and M. Horton, “Spatio-temporal analysis of team sports,” *ACM Computing Surveys (CSUR)*, **50**, article number: 22, 2017.
- [12] J. Bourbousson, C. Sève and T. McGarry, “Space-time coordination dynamics in basketball: Part 2. The interaction between the two teams,” *Journal of Sports Sciences*, **28**, pp. 349–358, 2010.
- [13] A. Bialkowski, P. Lucey, P. Carr, Y. Yue, S. Sridharan and I. Matthews, “Large-scale analysis of soccer matches using spatiotemporal tracking data,” In *Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Data Mining*, pp. 725–730, 2014.
- [14] 成塚拓真, 山崎義弘, “ドロネー分割と階層的クラスタリングを用いた集団スポーツにおけるフォーメーション解析手法の提案,” 統計数理, **65**, pp. 299–307, 2017. (English version: arXiv: 1802.06766)
- [15] T. Narizuka and Y. Yamazaki, “Classification algorithm for formations in football games,” in preparation, arxiv: 1805.07525.
- [16] 平岡和幸, 堀玄, 『プログラミングのための確率統計』, オーム社, 2009.
- [17] N. Hirotsu, M. Ito, C. Miyaji, K. Hamano and A. Taguchi, “Modeling tactical changes of formation in association football as a non-zero-sum game,” *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, **5**, ISSN (Online): 1559-0410.
- [18] K. Tamura and N. Masuda, “Win-stay lose-shift strategy in formation changes in football,” *EPJ Data Science*, **4**, article number: 9, 2015.
- [19] 杉原厚吉, 『なわばりの数理モデル—ポロノイ図からの数理工学入門—』, 共立出版, 2009.
- [20] T. Pang-Ning, M. Steinbach and V. Kumar, *Introduction to Data Mining*, Addison Wesley, 2005.
- [21] 成塚拓真, 山崎義弘, “ドロネー法に基づくフォーメーションの分類とパス解析,” 統計数理研究所共同研究リポート 398, pp. 137–142, 2018.
- [22] K. V. Mardia and P. E. Jupp, *Directional Statistics*, Wiley, 1999.
- [23] T. Narizuka and Y. Yamazaki, “Statistical properties for directional alignment and chasing of players in football games,” *Europhysics Letters*, **116**, article number: 68001, 2016.
- [24] Jリーグ.jp, <https://www.jleague.jp/> (2018年7月27日閲覧)
- [25] T. Narizuka, K. Yamamoto and Y. Yamazaki, “Statistical properties of position-dependent ball-passing networks in football games,” *Physica A*, **412**, pp. 157–168, 2014.
- [26] T. Narizuka, K. Yamamoto and Y. Yamazaki, “Degree distribution of position-dependent ball-passing networks in football games,” *Journal of the Physical Society of Japan*, **84**, article number: 084003, 2015.