

サッカーリーグにおけるチームパフォーマンスの 時間的推移の可視化

和泉 志津恵, 小畑 経史

サッカーの1試合での得点数はポアソン分布によく当てはまることが知られている。そのため、あるチームの得点数/失点数に当てはめたポアソン分布のインテンシティは、そのチームの攻撃/守備のパフォーマンスを表す指標と捉えることができる。そのパフォーマンス指標はシーズンを通して一定とは考えられず、時間的に変動すると想定される。そこで、パフォーマンスの時間的推移を、変化係数を伴うポアソン回帰モデルによって推定し、可視化する方法を提案し、2017年J2リーグのデータへ適用した結果を示す。

キーワード：サッカーデータ, ポアソン回帰, 変化係数

1. はじめに

サッカーの1試合での得点数/失点数がポアソン分布によく当てはまることは Chu [1] をはじめ数多く報告されており、その事実に基づいて得点数を生み出すポアソン分布の平均パラメータ（以降、インテンシティと呼ぶ）が何らかの共変量により決定される統計モデルが検討されてきた。泉と小中 [2] は、J1リーグにおいて2015年、2016年の2シーズンに導入された2ステージ制のチャンピオンシップについて考察した。彼らは得点数を決定する確率モデルを複数提案した。Saraiva et al. [3] は対戦する両チームの強さとホームアドバンテージ効果から得点数が決定されるとするモデルを提案し、イングランドとブラジルのリーグのデータに適用した。しかし、いずれもチームのパフォーマンスがシーズンを通して変化しないことを想定している。Koopman and Lit [4] はチームの得点数/失点数を生むポアソン分布のインテンシティが時間とともに変化するモデルを提案した。彼らは時間を離散的に捉え、直前のパフォーマンスから次のパフォーマンスが確率的に決定すると仮定した。われわれは Hastie and Tibshirani [5] により提案された変化係数の考え方を導入することで、チームパフォーマンスの連続的な時間的推移を考える。

連続的なパフォーマンスの抽出方法として、横軸に観測時間、縦軸に得点数（または失点数）をとった場合、計数値に対する平滑化が考えられる。ここでは、スプライン基底などを用いて大域的に推定を行うパラメトリック回帰から得られた推定結果の可視化を提案する。

2. 変化係数モデル

まず、時刻 $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ の n 個の時点において観測された結果 $y(t_1), \dots, y(t_n)$ を考える。結果の時間的推移を求めるために、時刻 t における目的変数を $y(t)$ とし、これを説明する p 個の共変量 $a_1(t), \dots, a_p(t)$ の回帰係数を $\beta_1(t), \dots, \beta_p(t)$ とおくと、目的変数がポアソン分布に従う場合、結果 $y(t)$ に対するポアソン回帰モデルは次式で書ける。

$$E(y(t)|a_1(t), \dots, a_p(t)) = \exp \left[\sum_{j=1}^p \beta_j(t) a_j(t) \right]. \quad (1)$$

ここで、 $\beta_j(t)$ は時間とともに変化する共変量の効果を表し、変化係数と呼ばれる。時間に関する変化係数の推定については佐藤と富田 [6] を参照されたい。また、変化係数は時間の代わりに位置についても考えることができ、位置情報に関する変化係数の推定については Satoh and Tonda [7] を参照されたい。

観測時点数が多い場合、時刻 t に関して $r (< n-2)$ 個の節点 $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ をもつ連続な折れ線を表す1次スプライン基底 $\mathbf{x}(t) = (1, t, (t - \kappa_1)_+, \dots, (t - \kappa_r)_+)^T$ により表現されるセミパラメトリックな変化係数を考えることができる。節点の位置は、節点間に同数の標本が割り当てられるパーセントイルや意味づけをした

いずみ しずえ

滋賀大学データサイエンス学部

〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

shizue-izumi@biwako.shiga-u.ac.jp

おばた つねし

大分大学理工学部

〒870-1192 大分県大分市大字旦野原 700

t-obata@oita-u.ac.jp

い点によって決める。なお、 $(t - \kappa)_+$ は $(t - \kappa)$ が正であれば $(t - \kappa)$ を、そうでなければ 0 をとる関数とする。そして、変化係数を次式で表す。

$$\beta_j(t) = \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{b}_j, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t)$ は時刻 t に関する既知共変量、 \mathbf{b}_j は回帰係数ベクトルである。

変化係数モデルは、主に医学や社会科学の分野で用いられている。たとえば、Izumi et al. [8] は、カウントデータに対する 2 値の共変量の効果の時間的推移を可視化する方法を提案し、広島市と長崎市の平和宣言テキストデータを用いて例示した。また、Tonda and Satoh [9] は、空間データに対する共変量の効果の推定において基準関数の形状を指定しない場合を提案し、ペンシルバニア州の犯罪データを用いて例示した。また、Satoh et al. [10] は、生存時間データに対する共変量の効果を、時間変化係数を用いたロジスティック回帰モデルにより推定する方法を提案し、急性白血病のデータを用いて例示した。ほかに、喫煙のサーベイランスデータ [11] や脳画像データ [12] への応用もある。このように、時間や位置情報に依存する効果を推定するために、変化係数モデルが用いられる。

3. チームパフォーマンスの時間的推移を推定するモデル

各国のプロサッカーリーグでは、所属するすべてのチームが何巡か（多くは 2 巡）総当たりで対戦し、勝敗によって与えられる勝ち点（勝ちが 3、引き分けが 1、負けが 0）の合計によりそのシーズンの順位が決定される。本稿ではそのようなリーグにおける 1 シーズンを通してのチームのパフォーマンスの変化について検討する。

サッカーでの 1 試合の得点数がポアソン分布に従うと仮定すると、得点数 y_O を生み出す何らかのインテンシティ λ_O が存在し、 $y_O \sim \text{Po}(\lambda_O)$ と考えられる。このインテンシティはチームごとに異なり、その値の大小はチームの攻撃力を表す指標と捉えることができる。同様に、失点数 y_D を生み出すインテンシティ λ_D 、すなわち $y_D \sim \text{Po}(\lambda_D)$ なる λ_D がチームごとに存在し、守備力を表す指標と捉えることができる。（ただし、守備力に関しては、 λ_D が大きいほど守備力が低いと言えるため、 $-\lambda_D$ を守備力指標と呼ぶべきかもしれない。）

チームの攻撃力、守備力は、シーズンを通して一定であるとは考えにくく、調子の良し悪しの波のようなものにより変動すると考えることは自然な考えである。

そこで、時刻 t により変動する攻撃力指標 $\lambda_O(t)$ 、守備力指標 $\lambda_D(t)$ がチームごとに存在し、時刻 t に開催される試合でのチームの得点数 $y_O(t)$ 、失点数 $y_D(t)$ がこれらのインテンシティを持つポアソン分布に従う、すなわち

$$y_u(t) \sim \text{Po}(\lambda_u(t)), \quad u = O, D$$

と想定される。本稿では、これら経時的に変化する攻撃力指標 $\lambda_O(t)$ 、守備力指標 $\lambda_D(t)$ （あるいは $-\lambda_D(t)$ ）、および、これらを統合した総合力指標 $\lambda_T(t) = \lambda_O(t) - \lambda_D(t)$ をもって、チームのパフォーマンスと捉える。

実際に得られた得点数、失点数からこれらを推定するためには変化係数を伴うポアソン回帰モデルが適している。ここでは、前節で述べたセミパラメトリックな変化係数 (2) を伴うポアソン回帰モデル (1) の最もシンプルなものとして、 $p = 1$, $a_1(t) = 1$ としたもの、すなわち、

$$\begin{aligned} E(y_u(t)) &= \lambda_u(t) = \exp[\beta_u(t)] \\ &= \exp[\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{b}_u], \quad u = O, D \end{aligned} \quad (3)$$

を、得点数と失点数のそれぞれに当てはめる。

各チームがシーズンを通して n 試合を行うとすると、試合が開催された時刻 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ での実際の得点数あるいは失点数 $y_u(t_1), y_u(t_2), \dots, y_u(t_n)$ を用いて、上記ポアソン回帰モデル (3) により係数 \mathbf{b}_u の推定値 $\hat{\mathbf{b}}_u$ を求めることによりそのチームのパフォーマンス指標の推定

$$\hat{\lambda}_u(t) = \exp[\hat{\beta}_u(t)] = \exp[\mathbf{x}(t)^\top \hat{\mathbf{b}}_u]$$

が得られる ($u = O, D$)。この関数は得点数あるいは失点数にフィットした曲線となる。さらに、総合力指標の推定 $\hat{\lambda}_T(t) = \hat{\lambda}_O(t) - \hat{\lambda}_D(t)$ は得失点差にフィットした曲線となる。

4. 適用例

ここでは 2017 年 J2 リーグに所属したチームについて、2017 年シーズンのパフォーマンスの時間的推移を、変化係数モデルにより推定し、可視化する。

4.1 データ

J リーグに関するデータは J リーグ公式サイト¹やデータスタジアム社が運営する Web サイト、Football LAB²で公開されている。Football LAB では J1, J2,

¹ <http://www.jleague.jp>

² <http://www.football-lab.jp>

表1 ジェフユナイテッド千葉得失点数データ

節	日付	日数	相手チーム	得点数	失点数
1	2/26	0	町田	1	0
2	3/4	6	山形	1	1
3	3/11	13	名古屋	2	0
4	3/19	21	松本	1	3
5	3/25	27	湘南	0	2
			(中略)		
40	11/5	252	町田	2	1
41	11/11	258	名古屋	3	0
42	11/19	266	横浜 FC	2	1

J3に所属するチーム/選手のより詳細なデータが閲覧できる。本稿の適用例では2017年J2リーグ戦全試合の得失点数データを使用する。2017年のJ2リーグには22チームが所属し、総当たりを2巡したため、各チームはそれぞれ42試合を戦った。同じ対戦相手とは、前半(第1節から第21節)と後半(第22節から第42節)にそれぞれ1度ずつ、いずれかはホームで、もう1戦はアウェイで対戦した。データの一例としてジェフユナイテッド千葉のデータの一部を表1に示す。「日数」は開幕日(第0日)を基準にして試合日がその何日後かを表す値であり、本稿の解析のために開催日から算出した。

4.2 パフォーマンスの推定と可視化

変化係数モデルで解析する際の時間の単位として、節を使用することが考えられる。しかし、J2リーグ戦は基本的に毎週末に開催されるものの試合によって1~2日のズレがある。また、節によっては平日(多くは水曜日)の夜に開催されることもあり、必ずしも等間隔とは言えない。さらに、2017年シーズンでは、悪天候のために第33節の1試合(愛媛FC対京都サンガF.C.)が延期され、第40節と第41節の間に開催された。したがって、より適切にパフォーマンスの時間的推移を見るために、開幕日を基準とした日数を時間の単位として使用する。

1次スプライン変化係数(2)の節点としては、調子の良し悪しの波をある程度表現するために、三つの節点を考えることにする。三つの節点 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ は、前半戦の中間点である第11節($\kappa_1 = 66$)、対戦が1巡した折り返し点である第21節と第22節の間($\kappa_2 = 128$)、後半戦の中間点である第32節($\kappa_3 = 195$)に設定する。以上の設定で、全22チームの攻撃力指標の係数の推定値 \hat{b}_O 、守備力指標の係数の推定値 \hat{b}_D を求めた。解析には統計解析環境R[13]を使用した。

このようにして得られた係数を用いて表される攻撃

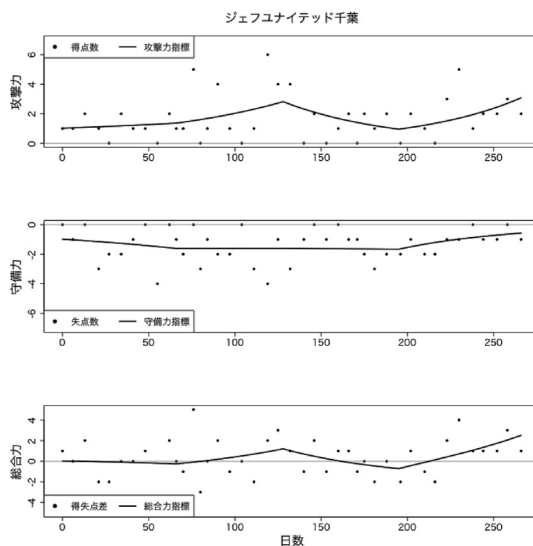


図1 千葉のパフォーマンス曲線

力指標 $\hat{\lambda}_O(t)$ 、守備力指標 $\hat{\lambda}_D(t)$ 、総合力指標 $\hat{\lambda}_T(t)$ を図示することで、チームのパフォーマンスの時間的推移が可視化できる。特徴のある3チームのパフォーマンスの推定曲線を図1~図3に示す。いずれも上から順に、得点数と $\hat{\lambda}_O(t)$ 、失点数(に-1をかけたもの)と $-\hat{\lambda}_D(t)$ 、得失点差と $\hat{\lambda}_T(t)$ を描いている。

ジェフユナイテッド千葉(図1)は35節(第216日)時点での12位から終盤の急激な追い上げで最終節(第266日)には昇格プレーオフ圏内の6位に滑り込んだが、その勢いがパフォーマンス曲線によく現れていることが見て取れる。

同様に終盤に好調さを見せたのがツエーゲン金沢(図2)である。曲線の上下方向の高さは異なるものの、好不調の変動だけを見ると千葉に似ている。金沢は35節(第216日)の20位から最終節(第266日)の17位へと、確かに順位を上げてはいるが、順位の上での上昇幅はそれほど大きいわけではない。しかし、パフォーマンス曲線では千葉に並ぶ勢いで終盤に調子を上げている。このように順位の変動だけでは読み取りにくい好不調の波が、パフォーマンス曲線により明らかになる。

千葉や金沢が比較的パフォーマンスの変動が大きい一方で、大分トリニータ(図3)はシーズンを通して安定したパフォーマンスを見せていることがわかる。

また、攻撃力と守備力を分けて分析することにより、総合的なパフォーマンスにどちらがどのように影響しているかを見ることができる。最終順位での上位3チーム(1位 湘南ベルマーレ、2位 V・ファーレン長崎、

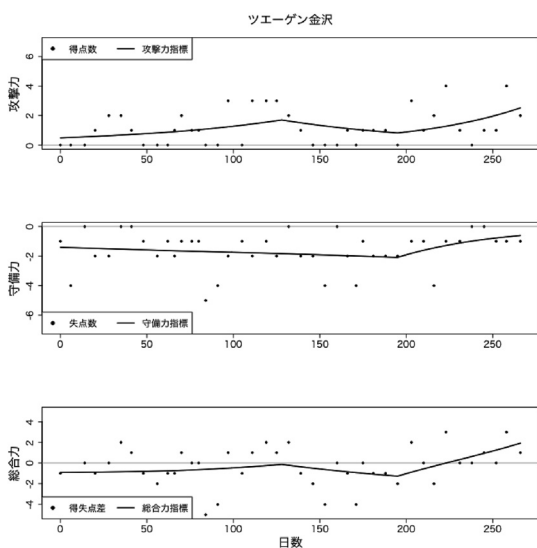


図2 金沢のパフォーマンス曲線

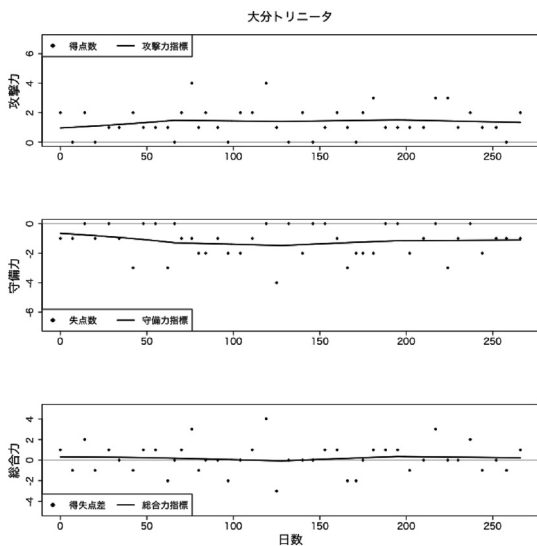


図3 大分のパフォーマンス曲線

3位 名古屋グランパス)と下位3チーム(20位 レノファ山口FC, 21位 ロアッソ熊本, 22位 ザスパクサツ群馬)のパフォーマンス曲線を図4に示す。この図より、名古屋は守備力は高くはないがそれを補う高い攻撃力が高い総合力を生み出していることがわかる。逆に、山口はシーズン後半の攻撃力は低くないが、低い守備力のために総合力がそれほど高くない。群馬はシーズンを通して攻撃力守備力ともに低く、大きな勝ち点差で最下位に沈んだことを裏づけている。

4.3 考察

最終順位での上位/下位チームのパフォーマンス曲

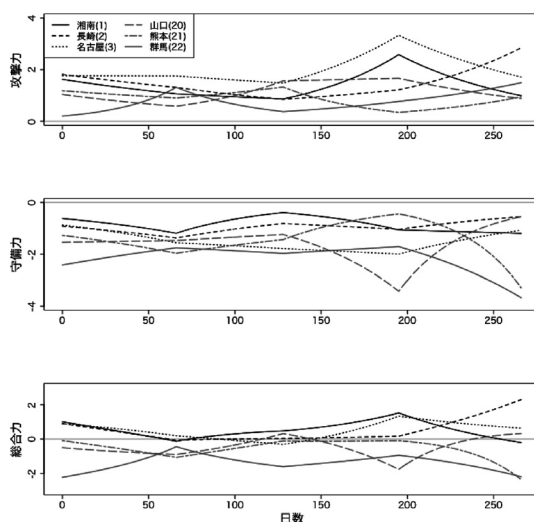


図4 上位/下位それぞれ3チームのパフォーマンス曲線

線(図4)によれば、総合力では上位チームの曲線が概ね下位チームの曲線よりも上に描かれており、本稿の分析で妥当な結果が得られているように思われる。

さらに、妥当な結果が得られたかどうかを見るために、以下のような手順で、得られたパフォーマンス指標を使ってすべての対戦の勝ち負けの確率を計算し、各チームの勝ち点の期待値を求め、実際の勝ち点と比較する。

時刻 t にチーム k とチーム l の対戦が開催されたとする。この試合でのチーム k の攻撃力は攻撃力指標の時刻 t での値 $\hat{\lambda}_O^{(k)}(t)$ で表され、この値が高いほどチーム k が高得点をあげられると期待される。しかし一方で、対戦相手であるチーム l の守備力指標の時刻 t での値 $\hat{\lambda}_D^{(l)}(t)$ が低ければ(すなわち守備力が高ければ)チーム k の得点は低く抑えられる。そこで、この試合でのチーム k の得点数が、 $\hat{\lambda}_O^{(k)}(t)$ と $\hat{\lambda}_D^{(l)}(t)$ を平均化した値をインテンシティとするポアソン分布に従うと仮定することで、得点数の確率を求めることができる。ただし、 $\hat{\lambda}_O^{(k)}(t)$ と $\hat{\lambda}_D^{(l)}(t)$ の平均は、その構造から幾何平均

$$\sqrt{\hat{\lambda}_O^{(k)}(t) \hat{\lambda}_D^{(l)}(t)} = \exp \left[\frac{\hat{\beta}_O^{(k)} + \hat{\beta}_D^{(l)}}{2} \right]$$

とする。同様にチーム l の得点数の確率が $\hat{\lambda}_O^{(l)}(t)$ と $\hat{\lambda}_D^{(k)}(t)$ の幾何平均 $\sqrt{\hat{\lambda}_O^{(l)}(t) \hat{\lambda}_D^{(k)}(t)}$ をインテンシティとするポアソン分布により決定される。両チームの得点数が独立であれば、両者の得点数の組み合わせの同時確率が得られ、それをもとにその試合でチーム k が勝つ確率、チーム l が勝つ確率、引き分ける確率と両

表 2 千葉と大分の得点数の同時確率

		大分得点数						
		0	1	2	3	4	5	6
千葉 得 点 数	0	0.030	0.045	0.034	0.017	0.006	0.002	0.000
	1	0.060	0.090	0.068	0.034	0.013	0.004	0.001
	2	0.060	0.090	0.068	0.034	0.013	0.004	0.001
	3	0.040	0.060	0.045	0.023	0.009	0.003	0.001
	4	0.020	0.030	0.023	0.011	0.004	0.001	0.000
	5	0.008	0.012	0.009	0.005	0.002	0.001	0.000
	6	0.003	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	0.000
	7	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000

表 3 勝ち点期待値の合計

チーム	勝ち点 期待値	期待値 順	実際の 勝ち点	実際の 順位	得失点 差	得失点 差順
徳島ヴォルティス	68.09	1	67	7	26	1
湘南ベルマーレ	67.83	2	83	1	22	2
アビスパ福岡	65.38	3	74	4	18	4
V・ファーレン長崎	65.36	4	80	2	18	4
松本山雅 FC	63.61	5	66	8	16	6
名古屋グランパス	62.92	6	75	3	20	3
東京ヴェルディ	62.05	7	70	5	15	7
ジェフユナイテッド千葉	61.69	8	68	6	12	8
横浜 FC	61.41	9	63	10	11	9
京都サンガ F.C.	60.72	10	57	12	8	10
大分トリニータ	60.59	11	64	9	8	10
FC 町田ゼルビア	58.38	12	50	16	0	12
モンテディオ山形	57.58	13	59	11	-2	13
ファジアーノ岡山	56.54	14	55	13	-5	15
水戸ホーリーホック	53.61	15	54	14	-3	14
FC 岐阜	53.31	16	46	18	-12	16
愛媛 FC	51.59	17	51	15	-14	17
ツエーゲン金沢	51.09	18	49	17	-18	18
カマタマーレ讃岐	49.34	19	38	19	-20	19
レノファ山口 FC	49.30	20	38	19	-21	20
ロアッソ熊本	46.87	21	37	21	-23	21
ザスパクサツ群馬	37.19	22	20	22	-56	22

チームの勝ち点の期待値が求められる。

たとえば、第 21 節のジェフユナイテッド千葉対大分トリニータの対戦（第 125 日に開催）であれば、 $\hat{\lambda}_O^{(千葉)}(125) \cong 2.72$ 、 $\hat{\lambda}_D^{(大分)}(125) \cong 1.47$ より千葉の得点数は $Po(2.00)$ に従い、 $\hat{\lambda}_O^{(大分)}(125) \cong 1.41$ 、 $\hat{\lambda}_D^{(千葉)}(125) \cong 1.61$ より大分の得点数は $Po(1.50)$ にしたがう。これより、両者の得点数の同時確率は表 2 で得られる。表の左下三角部分（すなわち、千葉の得点数が大分の得点数を上回るケース）の和を取ることで、千葉が勝つ確率は 0.493 となり、同様に右上三角部分より大分が勝つ確率が 0.291、対角部分より引き分けの確率が 0.216 となる。以上より、千葉の勝ち点の期

待値は 1.69、大分の勝ち点の期待値は 1.09 となる。実際にはこの試合では千葉が 4-1 で勝利し勝ち点 3 を得て、大分の勝ち点は 0 であった。

これをすべての試合について求め、各チームの勝ち点の期待値を合計したものを表 3 に示す。これを見ると、徳島ヴォルティスが実際の順位よりもかなり上位に位置づけられたことを除けば、おおむね実際の順位に近い順位づけが得られている。勝ち点の期待値での順位づけは、得失点差の順に近いことがわかる。われわれのパフォーマンス推定が得点数/失点数に基づくものであることを考えれば、ある意味当然の結果と言えるかもしれない。ちなみに、徳島がこれらで上位に

位置づけられながら、勝ち点がそれほど伸びなかった理由として、勝った試合では大差をつけたものの僅差での負け試合と引き分けが多かったことがうかがえる。

5. おわりに

サッカーの得失点数がポアソン分布に従うとき、そのインテンシティはチームの攻撃力、守備力を表す指標とみなすことができる。本稿ではそれらパフォーマンス指標が時間とともに変化すると考え、変化係数を伴うポアソン回帰モデルにより、時間についての関数としてパフォーマンス指標を推定する方法を提案した。日本のプロサッカーのリーグ戦のデータ（カップ戦を除く）に適用し、推定された指標関数を図示することで、チームの好不調の波を可視化した。また、得られたパフォーマンス指標に基づいて各チームの勝ち点の期待値を求め、得られた結果の妥当性を考察した。このように、セミパラメトリックな変化係数モデルの応用例を、スポーツデータの分析において示した。

本稿のパフォーマンス推定の使い途として、勝敗の予想が考えられる。J2 リーグではシーズン終了後に3位~6位チームによりJ1昇格プレーオフ（2018シーズンよりJ1参入プレーオフ）が実施される。プレーオフ参加チームについて推定されたパフォーマンス指標の、シーズン終了時点、もしくはプレーオフ開催時点での値を用いて、4.3節で述べたやり方で対戦での勝敗の確率を予測することで、勝敗予想に利用することができる。さらに、シーズンの途中においても、それ以前の得点数/失点数を学習データとしてその時点までのパフォーマンスの推移を学習し、それを用いて次節の対戦における両チームの勝敗確率の予測に利用することも考えられる。

本稿の変化係数モデルは時間以外の共変量を含まない最もシンプルなものであった。サッカーの試合ではホームアドバンテージの存在についてしばしば議論されており（文献 [3, 4, 14] など）、本稿のモデルに開催地がホームかどうかを共変量として加えることは興味深い。そのほかに、パフォーマンスに影響をもたらす可能性のある共変量として、リーグ戦の合間に開催されるカップ戦の影響、観客数、観客席の近さ（専用球技場か陸上競技場か）、天候なども考えられる。また、対戦相手の影響については結果の妥当性の考察の際には考慮したもの、モデル自体には組み込まれていない。相手チームのその時点でのパフォーマンスが自チームの得失点数に影響するモデルについて検討が望まれる。

得失点数が従う確率分布についてもさらなる検討の

余地がある。本稿では得点数と失点数は独立にそれぞれがポアソン分布に従うと仮定して、別々に分析した。しかし、必ずしも独立性の仮定が成り立つとは限らず、その場合にはKoopman and Lit [4]のように二変量ポアソン分布を用いて得点を生み出す攻撃力と失点を生み出す守備力を同時に分析する必要があるだろう。

謝辞 本研究の一部はJSPS 科研費 JP17K00047 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] S. Chu, “Using soccer goals to motivate the Poisson process,” *INFORMS Transactions on Education*, **3**(2), pp. 64–70, 2003.
- [2] 泉武志, 小中英嗣, “J1 リーグ 2 ステージ+ポストシーズン制度の統計的分析,” *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, **59**, pp. 21–37, 2016.
- [3] E. F. Saraiva, A. K. Suzuki, C. A. O. Filho and F. Louzada, “Predicting football scores via Poisson regression model: Applications to the National Football League,” *Communications for Statistical Applications and Methods*, **23**, pp. 297–319, 2016.
- [4] S. J. Koopman and R. Lit, “A dynamic bivariate Poisson model for analysing and forecasting match results in the English Premier League,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series A*, **178**, pp. 167–186, 2015.
- [5] T. Hastie and R. Tibshirani, “Varying-coefficient models,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **55**, pp. 757–796, 1993.
- [6] 佐藤健一, 富田哲治, “混合効果モデルを用いたセミパラメトリックな変化係数の推測について,” *応用統計学*, **42**, pp. 1–10, 2013.
- [7] K. Satoh and T. Tonda, “Estimating semiparametric varying coefficients for geographical data in a mixed effects model,” *Journal of the Japan Statistical Society*, **44**, pp. 25–41, 2014.
- [8] S. Izumi, T. Tonda, N. Kawano, and K. Satoh, “Estimating and visualizing the time-varying effects of a binary covariate on longitudinal big text data,” *The International Journal of Networked and Distributed Computing*, **5**, pp. 243–253, 2017.
- [9] T. Tonda and K. Satoh, “Estimating varying coefficients for a balanced growth curve model without specifying spatial-temporal baseline trend,” *Journal of The Japan Statistical Society*, **47**, pp. 1–12, 2017.
- [10] K. Satoh, T. Tonda and S. Izumi, “Logistic regression model for survival time analysis using time-varying coefficients,” *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **35**, pp. 353–360, 2016.
- [11] S. Assaf and S. Campostrini, “Application of the varying coefficient model to the behaviour risk factor surveillance data in Italy: A study of changing smoking prevalence among sub-populations,” *BMC Public Health*, **15**, 489, article number: 489, 2015.
- [12] H. Zhu, J. Fan and L. Kong, “Spatially varying coefficient model for neuroimaging data with jump discontinuities,” *Journal of the American Statistical Association*, **109**, pp. 1084–1098, 2014.

[13] R Core Team, “The R Project for Statistical Computing,” <https://www.r-project.org> (2018 年 5 月 9 日 閲覧)

[14] C. Goumas, “Home advantage in Australian soccer,” *Journal of Science and Medicine in Sport*, **17**, pp. 119–123, 2014.