

## 第36回日本OR学会学生論文賞

2018年度学生論文賞につきましては、15件の推薦をいただきました。表彰委員会による選考を経て、理事会にて以下のとおり承認されました。

各賞は2018年9月6日の秋季研究発表会（名古屋市立大学）にて授与されました。これらの論文はいずれも学生論文賞にふさわしい、ORに関する優秀な論文ばかりでした。

また、今回採択されませんでした論文も、それぞれ特徴のある優れた内容のものでありましたが、入賞件数その他の制約条件から、残念ながら選外となりましたことをご報告いたします。

第37回学生論文賞を2019年3月末締切で募集しています。卒業論文・修士論文の指導にあたっておられます教員の方々には、積極的にご推薦くださいますよう、お願いいたします。

表彰委員長 吉瀬章子

### 第36回 学生論文賞受賞者

（敬称略，五十音順，所属等は論文作成時）

- 大城泰平（東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻）  
「Index Reduction for Differential-Algebraic Equations by Combinatorial Relaxation」（修士論文）  
指導教員：岩田 覚（東京大学 教授）
- 君塚征貴（東京工業大学情報理工学院数理計算科学系）  
「一般化優対角行列による緩和を用いた Pooling Problem に対する解法の構築」（修士論文）  
指導教員：山下 真（東京工業大学 准教授）
- 黒木祐子（東京工業大学工学院経営工学系）  
「Approximation Algorithms for Hub-and-Spoke Network Design Problems and Metric Labeling Problems」（修士論文）  
指導教員：松井知己（東京工業大学 教授）
- 佐藤良亮（東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻）  
「双方向市場に対する多面体的クリンチングオークション」（修士論文）  
指導教員：平井広志（東京大学 准教授）
- 成島大悟（筑波大学大学院システム情報工学研究科社会学専攻）  
「半正定値基底を用いた錐最適化問題の近似について」（修士論文）  
指導教員：吉瀬章子（筑波大学 教授）
- 堀 篤史（南山大学大学院理工学研究科システム数理専攻）  
「Gauss-Seidel method for multi-leader-follower games」（修士論文）  
指導教員：福島雅夫（南山大学 教授）

#### [2018年度表彰委員]

吉瀬章子（委員長・筑波大学）、三好直人（副委員長・東京工業大学）、土谷 隆（政策研究大学院大学）、塩浦昭義（東京工業大学）、矢島安敏（オリックス（株））、高橋由泰（（株）日立製作所）、猿渡康文（筑波大学）、鈴木 勉（筑波大学）、村松正和（電気通信大学）、批々木規雄（慶應義塾大学）

# Index Reduction for Differential-Algebraic Equations by Combinatorial Relaxation

大城 泰平

東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻  
指導教員：岩田 覚 東京大学 教授

## 1. はじめに

微分代数方程式 (DAE) は軌道  $x(t)$  に関する方程式系

$$F_i(t, x, \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

であり, 常微分方程式  $\dot{x}(t) = \phi(t, x(t))$  と代数方程式  $G(t, x(t)) = 0$  の要素を併せもつ. DAE は機械力学系, 電気回路網, 化学反応系などの動的システムのモデリングにおいて高い表現力をもつものの, その解を数値的に求めることは必ずしも容易ではない. DAE の数値的な解きにくさは, 指数と呼ばれる特性量によって特徴づけられる. 指数は, DAE が常微分方程式からの程度離れているかを表す量であり, 指数 1 以下の DAE は実用的な精度で解くことが可能である. したがって, DAE で記述されたシステムの高精度なシミュレーションを行うためには, 与えられた DAE を指数 1 以下の DAE に変形する操作が重要である.

既存の DAE ソルバでは, Mattsson-Söderlind [1] の指数減少法 (MS 法) が主に採用されている. MS 法はグラフアルゴリズムを用いた Pantelides [2] の手法を前処理として用いるが, この手法は DAE のもつ数値的情報を捨象するため, 係数同士が数値キャンセルを起こす場合, MS 法が正しく動作しないことがある. そのような DAE に対しては, 組合せ緩和 [3] を用いて MS 法を適用可能な DAE に変形するアプローチが提案されている. 特に以下の定数係数線形 DAE

$$\sum_{k=0}^l A_k x^{(k)}(t) = f(t) \quad (\text{各 } A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}) \quad (2)$$

は, 全てのインスタンスを組合せ緩和によって MS 法が適用可能な DAE に変形することができる. 一般の非線形 DAE (1) に対する変形手法は Tan ら [4] によって提案されているものの, 適用不能な DAE も多い.

本研究では, 二種類の指数減少法を提案する. 一番目は, 各係数行列  $A_k$  が混合行列 [5] であるような定数係数線形 DAE (2) に対する指数減少法である. 混合行列は, 正確な定数または代数的独立なパラメータを

各要素にもつ行列であり, 誤差を含みうる物理量をパラメータとしてもつ動的システムの解析に有用である.

二番目の提案手法は, 一般の非線形 DAE (1) に対する指数減少法である. 本手法で用いる DAE の変形は, Tan らによる方程式の線形結合を用いた手法とは大きく異なり, 陰関数定理に基づく. 本手法は, 病的な例を除く全ての DAE に対して適用可能であることが期待される.

## 2. MS 法が正しく動作する条件

DAE (1) の式および変数の集合をそれぞれ  $R, C$  とし,  $F = (F_i)_{i \in R}, x = (x_j)_{j \in C}$  とする. 各  $i \in R, j \in C$  に対し,  $\sigma(F_i, x_j)$  を  $\partial F_i / \partial x_j^{(k)}$  が恒等的に 0 でない最大の  $k$  とする (存在しない場合は  $-\infty$ ). 二部グラフ  $G(F) = (R \cup C, E(F))$  の辺集合を  $E(F) = \{(i, j) \in R \times C \mid \sigma(F_i, x_j) > -\infty\}$  と定義し, 各辺  $(i, j) \in E(F)$  の重みを  $c_{i,j} = \sigma(F_i, x_j)$  と定める.

続いて,  $G(F)$  の最大重み完全マッチングの双対問題

$$D(F) \begin{cases} \min & \sum_{j \in C} q_j - \sum_{i \in R} p_i \\ \text{s.t.} & q_j - p_i \geq c_{i,j} \quad ((i, j) \in E(F)), \\ & p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i \in R, j \in C) \end{cases}$$

を考える.  $D(F)$  の実行可能解  $(p, q)$  に対して,  $\Sigma$ -Jacobi 行列  $D$  を  $D_{i,j} = \partial F_i^{(p_i)} / \partial x_j^{(q_j)}$  と定義する. ここで  $F_i^{(p_i)} = (d/dt)^{p_i} F_i$  である.

DAE (1) において,  $D(F)$  の最適解  $(p, q)$  に対応する  $\Sigma$ -Jacobi 行列  $D$  が (注目している初期値において) 正則ならば, MS 法は正しく動作するという十分条件が知られている [1].

## 3. 組合せ緩和による DAE の変形

組合せ緩和による DAE (1) の変形手順は以下である.

**Phase 1**  $D(F)$  の最適解  $(p, q)$  を計算する.

**Phase 2**  $(p, q)$  に対応する  $\Sigma$ -Jacobi 行列  $D$  が正則ならば DAE  $F = 0$  を出力して終了する.

**Phase 3**  $D(\bar{F})$  の最適値が  $D(F)$  の最適値未満と

なる  $\bar{F}$  に  $F$  を修正し, Phase 1 へ戻る.

Phase 3 における DAE の修正は, 解を変えない変形でなければならない. Tan らの手法では, 「ある式集合  $\{F_i = 0\}_{i \in I}$  ( $I \subseteq R$ ) (の微分) の線形結合を別の式  $F_r = 0$  ( $r \in R \setminus I$ ) に加える」という操作を用いる. これは (2) においては, その Laplace 変換

$$A(s)\tilde{x} = \tilde{f}(s) \quad \left( A(s) = \sum_{k=0}^l s^k A_k \right) \quad (3)$$

に対して, 行列式が非零定数であり, 各要素が  $s$  の多項式である行列を左から掛ける操作 (ユニモジュラ変形) に対応する. 各  $A_k$  が独立パラメータを含まない通常の行列である場合, ユニモジュラ変形による組合せ緩和法が Murota [3] によって与えられているため, この手法を DAE の修正に用いることができる.

本研究の一番目の問題設定では, 各  $A_k$  は混合行列であり, このとき  $A(s)$  は混合多項式行列とよばれる. 混合多項式行列に対する組合せ緩和法は Iwata-Takamatsu [6] によって与えられているものの, この手法はユニモジュラ変形を用いるものではないため, DAE の修正に適用することはできない. また, 上述の線形結合による DAE の修正手法は, 非線形 DAE においては, 適用可能なクラスが狭いという問題点をもつ.

#### 4. 混合行列を係数とする DAE の指数減少法

一番目の提案手法の概要を説明する. 本手法は混合行列を係数とする定数係数線形 DAE (2) の Laplace 変換 (3) を入力とする. まず, ダミー変数を導入することで, 与えられた方程式 (3) を  $A(s) = \begin{pmatrix} Q(s) \\ T(s) \end{pmatrix}$  という形の混合多項式行列を係数とする方程式に等価変形する. ここで  $Q(s)$  および  $T(s)$  はそれぞれ定数および独立パラメータを係数とする多項式を各成分にもつ行列である. 次に, この方程式を組合せ緩和によって MS 法が適用可能な DAE に変形する. Phase 3 では,  $T(s)$  に対応する行は修正を行わず,  $Q(s)$  に対応する行のみをユニモジュラ変形する. 本研究では, マトロイド交叉の双対最適解を利用して  $Q(s)$  をユニモジュラ変形するアルゴリズムを与えた.

本提案手法は, 正則な混合多項式行列  $A(s)$  を係数とする DAE (2) を  $O(l^2 n^{2+\omega})$  時間で指数 1 以下に等価変形する. ただし  $l$  は  $A(s)$  の要素の次数の最大値,  $\omega \leq 3$  は行列積の計算量の指数である.

また,  $Q(s)$  が  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{Z}$  を用いて

$$Q(s) = \text{diag}(s^{-\lambda_1}, \dots, s^{-\lambda_m}) \\ Q(1)\text{diag}(s^{\mu_1}, \dots, s^{\mu_n})$$

と表されるとき,  $A(s)$  は次の仮定を満たすという. これは物理現象を表現する DAE が自然に満たす仮定である. 本研究では, 次元の仮定を満たす  $A(s)$  に対し, 変形後の行列も同仮定を満たすように DAE を変形する組合せ緩和法を構成した. この手法によって, 指数減少法の計算量は  $O(ln^4 \log n)$  時間に改善される.

#### 5. 非線形 DAE の指数減少法

本研究では, 非線形 DAE に対する組合せ緩和法の Phase 3 において「ある式集合  $\{F_i = 0\}_{i \in I}$  ( $I \subseteq R$ ) (の微分) をある変数  $(x_j)_{j \in J}$  ( $J \subseteq C$ ) (の微分) について解き, それを別の式  $F_r = 0$  ( $r \in R \setminus I$ ) に代入する」という DAE の修正手法を与えた. 本手法が適用できない病的な DAE も人工的に構成することができるものの, Tan らの手法が適用不能なほとんどの DAE は本手法で修正することができる.

本手法の実装にあたっては, 「実行可能な初期値が必要」「数式を要素にもつ行列の正則性判定を行う」「方程式を記号的に解く」という問題点が存在する. 一番目の問題点においては, 高指数 DAE の実行可能な初期値を与えることが容易ではないという事実が背景にある. 本研究では, これらの問題点に対処する 3 つの実装方針を提案し, 提案手法が実際に実装可能であることを示した. この手法が適用可能な DAE のクラスを特徴づけること, および数値実験は今後の課題である.

#### 参考文献

- [1] S. E. Mattsson and G. Söderlind, “Index reduction in differential-algebraic equations using dummy derivatives,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, **14**, pp. 677–692, 1993.
- [2] C. C. Pantelides, “The consistent initialization of differential-algebraic systems,” *SIAM Journal on Scientific Statistical Computing*, **9**, pp. 213–231, 1988.
- [3] K. Murota, “Computing the degree of determinants via combinatorial relaxation,” *SIAM Journal on Computing*, **24**, pp. 765–796, 1995.
- [4] G. Tan, N. S. Nedialkov and J. D. Pryce, “Conversion methods for improving structural analysis of differential-algebraic equation systems,” *BIT Numerical Mathematics*, **57**, pp. 845–865, 2017.
- [5] K. Murota, *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer, 2000.
- [6] S. Iwata and M. Takamatsu, “Computing the maximum degree of minors in mixed polynomial matrices via combinatorial relaxation,” *Algorithmica*, **66**, pp. 346–368, 2013.

# 一般化優対角行列による緩和を用いた Pooling Problem に対する解法の構築

君塚 柁貴

東京工業大学情報理工学院数理・計算科学系（現：(株)日立製作所）  
 指導教員：山下 真 東京工業大学 准教授

## 1. はじめに

石油は世界のエネルギー供給の中心的役割を果たしており、今後もその役割を担っていくことが考えられる。そのため、石油の原料である原油は重要な資源であるが、その埋蔵量は有限であることが知られている。したがって、原油を需要に合わせて効率良く使用していく必要がある。

本研究ではこうした実問題に対して、需要を満たす中で効率の良い原油の輸送スケジュールが解となる Pooling Problem (PP) [1, 2] に注目した。そして PP に対し、既存手法 [1] より高精度でかつ高速で解を求めることが可能な手法を構築した。特に、PP の SDP 緩和と同じ最適値が LP 緩和で得られることを理論的に示した。また、再スケジュールリング法により、効率的に解を得ることに成功した。

## 2. Pooling Problem の定式化と既存手法

表 1 に記載されている集合、変数、定数を用いて図 1 で表される PP を定式化すると次のようになる。この問題は非凸二次の MINLP で定式化されており NP 困難であることが知られている [2]。

$$\begin{aligned} \min_{a, p, q, u, v} & \sum_{t \in T} \left( \sum_{(i, j) \in A} CA_{ij} a_{ij}^t + \sum_{i \in V_P} CQ_i DC_i^t v_i^t \right) \\ \text{s.t.} & u_{ij}^t L_{ij} \leq a_{ij}^t \leq u_{ij}^t U_{ij}, ((i, j) \in A, t \in T), \\ & u_{ij}^t \in \{0, 1\}, \\ & \sum_{j \in I(i)} u_{ji}^t + \sum_{k \in E(i)} u_{ik}^t \leq 1, (i \in V, t \in T), \\ & p_i^{t+1} = p_i^t + SA_i^t - \sum_{k \in E(i)} a_{ik}^t, p_i^t \geq 0, \end{aligned}$$

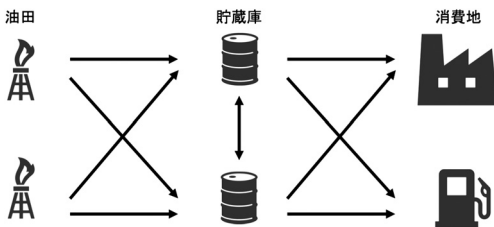


図 1 Pooling Problem の全体像

$$\begin{aligned} p^{M_T+1} &= 0, (i \in V_S, t \in T), \\ p_i^{t+1} q_i^{t+1} &= p_i^t q_i^t + SA_i^t SQ_i^t - \sum_{k \in E(i)} a_{ik}^t q_i^t, \\ & (i \in V_S, t \in T), \\ p_i^{t+1} &= p_i^t + \sum_{k \in I(i)} a_{ki}^t - \sum_{k \in E(i)} a_{ik}^t, \\ 0 < p_i^{\min} &\leq p_i^t \leq p_i^{\max}, (i \in V_B, t \in T), \\ p_i^{t+1} q_i^{t+1} &= p_i^t q_i^t + \sum_{k \in I(i)} a_{ki}^t q_k^t - \sum_{k \in E(i)} a_{ik}^t q_i^t, \\ & (i \in V_B, t \in T), \\ q_i^t &= \frac{1}{DC_i^t} \sum_{j \in I(i)} a_{ij}^t q_j^t, (i \in V_P, t \in T), \\ v_i^t &\geq \max\{0, DQ_i^t - q_i^t\}, (i \in V_P, t \in T). \end{aligned}$$

表 1 定式化で用いる集合、定数、変数

集合					
$V_S$	油田の集合	$V_B$	貯蔵庫の集合	$V_P$	消費地の集合
$T$	計画時間の集合	$V$	油田、貯蔵庫、消費地の集合		
$(i, j)$	$i$ から $j$ への連絡	$I(i)$	$i$ に向かうバスの出発点の集合		
$A$	バス $(i, j)$ の集合	$E(i)$	$i$ から出るバスの行き先の集合		
定数					
$M_S$	油田の数	$M_B$	貯蔵庫の数	$M_P$	消費地の数
$M_T$	計画期間	$SA_i^t$	供給される量	$SQ_i^t$	供給される質
$U_{ij}$	流す際の最大量	$L_{ij}$	流す際の最小量	$CA_{ij}$	輸送コスト
$DC_i^t$	要求される量	$DQ_i^t$	要求される質	$CQ_i$	罰金係数の重み
$p_i^{\max}$	保存できる最大量	$p_i^{\min}$	保存すべき最小量		
変数					
$a_{ij}^t$	流す量	$p_i^t$	保有する量	$q_i^t$	保有する質
$u_{ij}^t$	binary 変数	$v_i^t$	罰金項		

既存手法 [1] では、このように定式化される PP に対し、PP を非凸二次の NLP に緩和した後、次のような三段階に分けて解く Three step method を提案した。

1. PP の SDP 緩和を解き緩和解  $x_{rela}$  を得る
2.  $x_{rela}$  を用いて PP の実行可能解  $x_{fea}$  を得る
3.  $x_{fea}$  を初期点として局所探索を行い局所最適解  $x^*$  を得る

## 3. 提案手法と示した定理

本研究では、SDSOS, DSOS [3] 緩和を用いた手法を二つ提案した。また、提案手法の根拠となる定理の証明を行った。一つ目の提案手法は、[1] と SDSOS, DSOS 緩和を組合せた手法であり、SDSOS, DSOS 緩和はそれぞれ SOCP, LP 緩和の特殊形である。この手

法を提案する根拠となった定理 3.1 を示した (証明略).

表 2 問題の設定

問題	$M_S$	$M_B$	$M_P$	$M_T$	変数の数 ( $n$ )
3	2	2	1	10	176
8	2	4	2	28	1228

定理 3.1. 次のような QCQP を考える.

(QCQP-Problem)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & x^T A_0 x + 2b_0^T x + c_0 \\ \text{s.t.} \quad & x^T A_j x + 2b_j^T x + c_j \leq 0, \\ & (j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

係数行列  $A_0, A_1, \dots, A_m$  の対角成分は全て 0 とする. この時, QCQP-Problem の SDP 緩和と SDSOS 緩和の最適値は一致する. また, 次のように定義される集合  $S$  が有界であると仮定する.

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} c_j & b_j^T \\ b_j & A_j \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \leq 0 \right. \\ \left. (j = 1, \dots, m), \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq O, \exists X \succeq O \right\}.$$

(ここで  $S$  は, QCQP-Problem の制約集合を実対称行列  $X$  を用いて SDP 緩和したものである.) この時, QCQP-Problem の SDP 緩和と DSOS 緩和の最適値は一致する.

二つ目の提案手法は, 輸送スケジュールを逐次修正していく手法であり, アルゴリズムは次のとおりである.

再スケジューリング法

1.  $\hat{t} = 0$  とする
2. 時刻  $\hat{t} + 1, \dots, M_T$  までの PP を定式化し SDSOS (または DSOS) 緩和を用いて解いて緩和解  $x_{rela}$  を得る
3.  $x_{rela}$  をもとに PP の実行可能解  $x_{fea}$  を得る
4.  $x_{fea}$  が需要を満たすか調べる (満たしていれば  $x_{fea}$  を返して終了)
5. 需要をはじめて満たさない時刻を  $t^+$  とし,  $\hat{t} + 1, \dots, t^+$  までの輸送スケジュールを需要を満たすよう修正する (修正が不可能ならば  $x_{fea}$  を返して終了)
6.  $\hat{t} = t^+$  とし 2. に戻る ( $\hat{t} = M_T$  ならば終了)

再スケジューリング法の重要となる部分が Step 5 の操作である. Step 5 は各時刻毎に  $x_{fea}$  が需要を満たしているかどうかを確認し, 需要を満たしている場合は輸送スケジュールの効率化, 満たしていない場合は

表 3 数値実験結果: 問題 3, 8

問題 3 ( $n = 176$ )				
	満足度	緩和値	目的関数値	実行時間 [s]
Three step	98.66%	181.14	6594.55	2874.69
提案手法 1 (SDP)	99.99%	300.00	546.91	3404.74
提案手法 1 (SDSOS)	80.11%	300.00	89974.73	2901.57
提案手法 1 (DSOS)	99.99%	300.00	510.81	2906.73
再スケジュール (SDSOS)	100.00%	*	503.97	38.11
再スケジュール (DSOS)	99.70%	*	1852.02	34.52
問題 8 ( $n = 1228$ )				
	満足度	緩和値	目的関数値	実行時間 [s]
Three step	98.27%	458.22	22214.26	39700.32
提案手法 1 (SDP)			> 24 hours	
提案手法 1 (SDSOS)	99.99%	824.00	1714.70	22675.94
提案手法 1 (DSOS)	99.33%	824.00	8957.09	40951.62
再スケジュール (SDSOS)	100.00%	*	1636.82	14112.74
再スケジュール (DSOS)	100.00%	*	1634.99	9496.46

輸送スケジュールの再編成を行う.

#### 4. 数値実験

先に紹介した手法の比較のため数値実験を行った (一部掲載). 問題 3, 8 の設定の一部は表 2 のとおりである. 得られた解は満足度で評価をする. 満足度は  $(\sum_{t \in T} \sum_{i \in V_P} DQ_i^t - \sum_{t \in T} \sum_{i \in V_P} v_i^t) / \sum_{t \in T} \sum_{i \in V_P} DQ_i^t$  で定義され, 需要をどの程度満たしているかを示している.

表 3 より, SDP 緩和と同じ値を SDSOS, DSOS 緩和でも得られることを確認できた. また, 再スケジューリング法により, 実行時間を大幅に短縮することに成功した.

そして, 再スケジューリング法は既存手法 [1] と比較して大規模な問題を高速で解くことが可能であることを数値実験から確認した.

定理 3.1 の適用範囲の拡大, 再スケジューリング法のアルゴリズムの改良, そして実データを盛り込んだ問題に適用などが今後の課題として挙げられる.

#### 参考文献

[1] T. Nishi, "A semidefinite programming relaxation approach for the pooling problem," Master's thesis, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, 2010.  
 [2] M. Alfaki and D. Haugland, "Strong formulations for the pooling problem," *Journal of Global Optimization*, **56**, pp. 897–916, 2013.  
 [3] A. A. Ahmadi and A. Majumbar, "DSOS and SD-SOS Optimization: LP and SOCP-Based Alternatives to Sum of Squares Optimization," In *Proceedings of the 48th Annual Conference on Information Sciences and Systems*, pp. 1–5, 2014.

# Approximation Algorithms for Hub-and-Spoke Network Design Problems and Metric Labeling Problems

黒木 祐子

東京工業大学工学院経営工学系 (現所属: 東京大学大学院情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻)  
指導教員: 松井知己 東京工業大学 教授

## 1. はじめに

実社会では、効率の良いネットワーク設計が多く求められている。例えば、航空ネットワークの設計、通信ネットワークの設計が挙げられる。また近年ではネット通販の拡大によって配送需要が高まっており、コスト効率の良い輸送経路の設計が必要である。広範囲に及ぶ多数の地点間で輸送を行う際、ハブネットワークと呼ばれるネットワーク形態がよく用いられる。ハブネットワークは、輸送の中継地点の役割を果たす点(ハブ)とハブではない点(非ハブ)から成る。このハブネットワークを用いることで、直接全ての点同士を接続することなく、少ない接続リンク数で広範囲に及ぶ輸送が可能になり、輸送コストの削減に繋がる。

ハブネットワーク設計問題は数理最適化問題としてモデル化できる [1]。入力として与えられるのはハブの集合  $H = \{1, 2, \dots, h\}$ 、非ハブの集合  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 、各非ハブのペア  $(p, q) \in N^2$  について  $p$  から  $q$  への輸送量  $w_{pq} (\geq 0)$ 、ペア  $(i, j) \in (N \cup H)^2$  について  $i$  から  $j$  への単位輸送コスト  $c_{ij}$  である。ハブネットワーク設計問題とは「各非ハブはちょうど1つのハブに接続する」という制約のもとで、総輸送コストを最小にするように「各非ハブからハブへの割当」を決定する問題である。この数理最適化問題は、メトリックラベリング問題(エネルギー関数を最小にするように画像の各ピクセルに整数のラベルを割り当てる問題)と数学的に等価であり、画像のノイズ除去や画像分割へのモデリングに応用されている [2]。このような背景から、ハブネットワーク設計問題は、オペレーションズ・リサーチ、通信工学、画像処理など幅広い分野で長年研究されてきたトピックであり、この問題に対する高品質な解を求める汎用的な手法の構築は、重要な研究課題である。

上述のハブネットワーク設計問題は NP 困難である [3]。現在までに、この問題に対する発見的解法と指数時間厳密解法が多く提案されてきた。しかしながら、最良の厳密解法でも、非ハブ数が 200 程度、ハブの数

を小さい数に固定した特殊ケースでも 500 程度の小規模な問題しか解けていない [4]。実ネットワークに現れる問題ではノード数が 1,000 以上の問題を扱うことが多くあり、多項式時間精度保証付き近似アルゴリズムの研究の必要性はさらに高まっている。

本研究の成果は、特に通信ネットワークにおいてよく現れるハブの接続形態をモデル化した離散最適化問題に対して、精度保証付きアルゴリズムを提案したことである。一般の場合に対する既存の精度保証付き近似アルゴリズム [2] の近似比は  $O(\log(\text{ハブ数}))$  である。本論文は精度保証付き近似アルゴリズムに関する次の 2 つの成果をまとめたものである:

- (1) サイクル型の場合に対する  $2(1 - \frac{1}{\text{ハブ数}})$ -近似アルゴリズムの提案、および三角不等式の仮定のもとでの  $\frac{3}{2} - \frac{1}{2(\text{ハブ数}-1)}$ -近似アルゴリズムの提案。
- (2) スター型の場合に対する約 5.281-近似アルゴリズムの提案。

以降、紙面の都合上、スター型の場合の問題定義および提案手法の概略を述べる

## 2. スター型ハブネットワーク設計問題

本研究で扱うスター型ハブネットワーク設計問題(SHP)は、各ハブが中心に位置するハブに接続しているネットワーク形態をモデル化したものである。既存手法 [2, 5] では別の問題への複雑な変換が必要であり、さらにその近似比の解析は非常に複雑であり、簡単な解析ではその近似比が 6 より大きいことがわかっている。本研究では線形緩和問題と従属丸め技法により直接的に解く 5.281-近似アルゴリズムを提案し、既存研究よりも良い結果を与えた。

### 2.1 問題の定義および定式化

ハブの集合  $H$ 、非ハブの集合  $N$ 、非ハブ間の輸送量  $w_{pq}$  および単位輸送コスト  $c_{ij}$  が与えられる。ここで、各ハブは中心に位置するデポと呼ばれるノードに接続すると仮定する。 $\ell_i (\leq 0)$  はハブ  $i$  とデポの間の単位輸送コストとする。

各  $\{p, i\} \in N \times H$  について、非ハブ  $p$  をハブ  $i$  に接

続するとき 1, そうでない場合 0 である 0-1 変数  $x_{pi}$  とする. すると, SHP は整数計画問題

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left( \sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj} \right) \\ & + \sum_{k \in H} \ell_k |x_{pk} - x_{qk}| \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in H} x_{pi} = 1 \quad (\forall p \in N), \\ & x_{pi} \in \{0, 1\} \quad (\forall \{p, i\} \in N \times H). \end{aligned}$$

として定式化できる. 上記の整数計画問題において 0-1 制約を  $x_{pi} \geq 0$  に緩和し,  $|x_{pk} - x_{qk}|$  を新たな非負変数  $Z_{pqk}$  で置き換えることで, 線形計画緩和問題 (LRP) を導出できる.

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left( \sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj} \right) \\ & + \sum_{k \in H} \ell_k Z_{pqk} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in H} x_{pi} = 1 \quad (\forall p \in N), \\ & 0 \leq x_{pi} \quad (\forall \{p, i\} \in N \times H), \\ & -Z_{pqk} \leq x_{pk} - x_{qk} \leq Z_{pqk} \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall k \in H). \end{aligned}$$

内点法によりこの LRP の最適解を多項式時間で得ることができる.

## 2.2 定数近似アルゴリズム

提案手法では, ハブのクラス分けおよび非ハブのクラス分けをしたのちに各非ハブからハブへの割当を決定する. ハブのクラス分けは, 各ハブ  $i \in H$  についての  $\ell_i$  の大きさによりハブをいくつかの部分集合 (クラス) に分割する. 非ハブのクラス分けには, 線形緩和問題 LRP の最適解  $\mathbf{x}^*$  を用いた従属ラウンディング技法を用いる. 最後に各クラスごとで従属ラウンディングを行うことで各非ハブからハブへの割当を決定する.

本研究では, スター型の距離をライン型の距離で近似する不等式を示した. さらに非ハブのペア  $(p, q) \in N^2$  を固定した場合の部分問題がヒッチコック型輸送問題と等価であることと, 距離行列のモンジュ性を用いることで, ハブ間での輸送コストの上界値を与えた. 線形項に関しては, 近似解における線形項の関数値が緩和問題の最適値と一致することを証明した. これらを用いて, 次の定理を示した.

**定理 2.1.** 提案手法はスター型ハブネットワーク設計問題に対する  $\min_{r>1} \frac{r-1}{\log r} (2 + \frac{r^2+1}{r^2-1}) \approx 5.2809$ -近似的アルゴリズムである.

## 参考文献

- [1] M. O'Kelly, "A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities," *European Journal of Operational Research*, **32**, pp. 393–404, 1987.
- [2] J. Kleinberg and E. Tardos, "Approximation algorithms for classification problems with pairwise relationships," *Journal of ACM*, **49**, pp. 616–639, 2002.
- [3] J. Sohn and S. Park, "The single allocation problem in the interacting three-hub network," *Networks*, **35**, pp. 17–25, 2000.
- [4] R. Z. Farahani, M. Hekmatfar, A. B. Arabani and E. Nikbakhsh, "Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications," *Computers and Industrial Engineering*, **64**, pp. 1096–1109, 2013.
- [5] G. Konjevod, R. Ravi and F. S. Salman, "On approximating planar metrics by tree metrics," *Information Processing Letters*, **80**, pp. 213–219, 2001.
- [6] M. Iwasa, H. Saito and T. Matsui, "Approximation algorithms for the single allocation problem in hub-and-spoke networks and related metric labeling problems," *Discrete Applied Mathematics*, **157**, pp. 2078–2088, 2009.

# 双方向市場に対する多面体的クリンチングオークション

佐藤 良亮

東京大学大学院情報理工学系研究科数理工学専攻（現：三井住友海上火災保険株式会社）  
指導教員：平井広志 東京大学 准教授

## 1. はじめに

複数財のオークションで買い手が入札額とは別に全体での予算を持つ設定は、実用上自然かつ重要であり、近年盛んに研究が進められている。売り手が1名の単方向市場に対しては、Goel et al. [1] によってポリマトロイド理論を駆使した多面体的クリンチングオークションという極めて汎用的な設定に適用可能な優れた性質を持つメカニズムが提案されている。このメカニズムは、Dobzinski et al. [2] によって予算制約と適合的だと示された Ausubel [3] のクリンチングオークションの一般化である。一方、証券取引や Web 上のディスプレイ広告の割当などの実用的な応用があるにもかかわらず、売り手が複数名の双方向市場の場合に汎用的な予算制約を伴う設定に対する研究は行われていない。背景には双方向市場の場合に古典的な不可能性定理 [4] が存在するため、予算制約の有無によらずに十分な研究が行われていないということがある。

本研究では多面体的クリンチングオークションを拡張し、双方向市場の汎用的な予算制約を伴う設定に適用可能なメカニズムを提案した。本研究の設定はポリマトロイド制約を伴うため非常に汎用的であり、ディスプレイ広告の割当への応用が期待される。また、提案メカニズムは買い手の誘引両立性、個人合理性、パレート最適性、収支バランスなどの望ましい性質を満たしている。証明には Lawler and Martel [5] のポリマトロイド流問題の枠組をオークション理論で初めて利用しており、この点は本研究の技術的な貢献である。

## 2. 問題設定

$n$  人の買い手と  $m$  人の売り手からなる双方向市場を考える。買い手の集合を  $N := \{1, 2, \dots, n\}$ 、売り手の集合を  $M := \{1, 2, \dots, m\}$  とする。買い手  $i \in N$  が売り手  $j \in M$  と取引したい場合に両者を辺  $(i, j)$  で結ぶ。得られた辺集合を  $E \subseteq N \times M$  とする。このとき、市場は二部グラフ  $(N, M, E)$  として表される。以後、辺  $(i, j) \in E$  を  $ij$  と表し、買い手  $i$ 、売り手  $j$  と接続する辺の集合をそれぞれ  $E_i, E_j$  とする。

出品されている品物への単位量あたりの価値（評価額）は参加者ごとに定まり、出品者に依らないとする。買い手  $i$  の評価額を  $v_i \in \mathbf{R}_+$  として、買い手  $i$  は評価額に対応する値としての入札額  $v'_i \in \mathbf{R}_+$  と、オークション全体での予算  $B_i \in \mathbf{R}_+$  を仲介者に申告する。売り手  $j$  の評価額を  $\rho_j \in \mathbf{R}_+$  として、売り手  $j$  は評価額に対応する値としての応札額を仲介者に正直に  $\rho_j$  と申告すると仮定する。また、単調劣モジュラ関数  $f_j: 2^{E_j} \rightarrow \mathbf{R}_+$  によって  $E_j$  を通じて取引できる品物数が制約されている。  $F \subseteq E_j$  に対し、 $f_j(F)$  が辺の部分集合  $F$  を通じて取引できる最大の品物数に対応する。また、 $f_j(E_j)$  が売り手  $j$  の総品物数に対応する。このとき仲介者がアクセスできる情報は  $\mathcal{I} := ((N, M, E), \{v'_i\}_{i \in N}, \{B_i\}_{i \in N}, \{\rho_j\}_{j \in M}, \{f_j\}_{j \in M})$  となる。この情報をもとに、仲介者はオークションの割当  $\mathcal{A} := (w, p, r)$  を与える。ただし、 $w := (w_{ij})_{ij \in E}$  は取引量に対応し、 $w_{ij} \in \mathbf{R}_+$  が買い手  $i$  と売り手  $j$  の間の取引量を表す。 $p = (p_i)_{i \in N}$  は買い手の支払額に対応し、 $p_i \in \mathbf{R}_+$  が買い手  $i$  の支払額を表す。 $r = (r_j)_{j \in M}$  は売り手の支払額に対応し、 $r_j \in \mathbf{R}_+$  が売り手  $j$  の収入を表す。なお、割当は予算制約  $p_i \leq B_i$  ( $i \in N$ ) とポリマトロイド制約  $w|_{E_j} \in P_j$  ( $j \in M$ ) を満たす必要がある。ただし、 $w|_{E_j}$  は  $w$  の  $E_j$  への制限であり、 $P_j$  は  $f_j$  に対応するポリマトロイドである。

買い手と売り手の効用は割当  $\mathcal{A}$  によって定まる。買い手  $i$ 、売り手  $j$  の効用をそれぞれ  $u_i(\mathcal{A}), u_j(\mathcal{A})$  とし、次のように定義する：

$$u_i(\mathcal{A}) := \begin{cases} v_i \sum_{ij \in E_i} w_{ij} - p_i & \text{if } p_i \leq B_i, \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$u_j(\mathcal{A}) := r_j + \rho_j \left( f_j(E_j) - \sum_{ij \in E_j} w_{ij} \right).$$

仲介者は買い手と売り手の両方に配慮した割当を与えることが求められる。そのため両者の効用に対して優れた理論保証を伴う、情報  $\mathcal{I}$  から割当  $\mathcal{A}$  を定めるメカニズムを設計したい。



### 3. 主結果

双方向市場のオークションにおける重要な性質には誘引両立性、個人合理性、パレート最適性、収支バランスがあり、誘引両立性と個人合理性は買い手と売り手のそれぞれで考えられる。一方、これら全てを満たすメカニズムは存在しないことが知られている [4]。

本研究では売り手が応札額を正直に申告すると仮定することで売り手の誘引両立性は考慮せず、その他の性質を全て満たすメカニズムを与えた。

### 4. 提案メカニズム

まず  $m$  人の仮定の買い手を追加する。買い手  $n+j$  の入札額と評価額を  $p_j$ 、予算を  $\infty$  とし、売り手  $j$  とのみ辺で結ぶ。この仮定の買い手は対応する売り手と制約なく取引可能である。そして、この操作に伴い、 $(N, M, E)$  と  $P_j$  を修正する。このとき、買い手  $n+j$  の取引量はオークション終了時の売り手  $j$  の売れ残りの品物数であるとし、最終的な売り手  $j$  の効用は買い手  $n+j$  と売り手  $j$  の効用の和となる。

この準備の後に次の操作を行う。以下は概略である。買い手  $i$  には価格  $c_i$  が与えられており、0 から順番に  $\varepsilon$  ずつ増加する。ある買い手の価格が増加するたびに各買い手のその反復での取引量が計算され、買い手  $i$  はその量だけ単位量当たり現在価格  $c_i$  で取引する。取引量  $w$ 、支払額  $p$ 、収入  $r$  は初期値 0 を取り、買い手の取引に応じて増加して最終的に出力される。また、価格と残り予算に対して、需要  $d_i$  を次のように定義する：

$$d_i := \begin{cases} (B_i - p_i)/c_i & \text{if } c_i < v'_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$d_i$  は買い手  $i$  の現在の価格  $c_i$  のもとで取引したい量の上限を表す。全員の需要が 0 になったらオークションは終了する。終了までは次の手順を繰り返す：

1. 各買い手の品物の取引量を計算する (後述)。
2. 取引に伴い、取引量と支払額を更新する。
3. 買い手  $l$  の価格を  $\varepsilon$  増加させる。
4. 各買い手の需要を更新する。
5.  $l$  を 1 だけ増加。  $n+m$  に達したら 1 に戻る。

全員の需要が 0 になったら、仮定の買い手の取引を全て打ち消して  $(w, p, r)$  を出力する。

### 5. 各反復での取引量の計算

本研究では買い手  $i$  が品物を  $\xi_i \in \mathbf{R}_+^{E_i}$  だけ取引すると仮定したときに、 $i$  以外の買い手の以後の取引量の許容集合を変化させない  $\xi_i$  で極大なものを買い手  $i$  のその反復での取引量であると定めた。そして条件を満たす  $\xi_i$  の許容集合があるポリマトロイドの基多面体をなすことを示した。よって買い手の取引量は多項式時間で計算できる。この導出には (オークション理論で初めて) ポリマトロイド流問題 [5] の枠組を利用しており、本研究の技術的な貢献である。

### 6. 先行研究との関係

仮定の買い手を追加した後、売り手全員を統合して 1 人とみなすことで、[1] の多面的クリンチングオークションが適用可能となる。各辺を通じての取引量と各売り手の収入が得られないために所望の割当は得られないが、この操作でも各買い手の取引総量と支払額を得られる。本研究では、等しい  $\varepsilon$  のもとで両メカニズムの各買い手の取引総量と支払額は等しいことを示した。したがって提案メカニズムは [1] のメカニズムの双方向市場への拡張となっている。これによって買い手の割当に関する綺麗な構造が導かれ、パレート最適性などの良い性質を示した。

#### 参考文献

- [1] G. Goel, V. Mirrokni and R. P. Leme, “Polyhedral clinching auctions and the adwords polytope,” *Journal of the ACM*, **62**, 18:1–18:27, 2015.
- [2] S. Dobzinski, R. Lavi and N. Nisan, “Multi-unit auctions with budget limits,” *Games and Economic Behavior*, **74**, pp. 486–503, 2012.
- [3] L. M. Ausubel, “An efficient ascending-bid auction for multiple objects,” *American Economic Review*, **94**, pp. 1452–1475, 2004.
- [4] R. B. Myerson and M. A. Satterthwaite, “Efficient mechanisms for bilateral trading,” *Journal of Economic Theory*, **29**, pp. 265–281, 1983.
- [5] E. L. Lawler and C. U. Martel, “Computing maximal ‘polymatroidal’ network flows,” *Mathematics of Operations Research*, **7**, pp. 334–347, 1982.

## 半正定値基底を用いた錐最適化問題の近似について

成島 大悟

筑波大学大学院システム情報工学研究科社会工学専攻  
指導教員：吉瀬章子 筑波大学 教授

## 1. はじめに

現在、錐最適化問題は様々な分野で応用されている。その一種である半正定値計画問題 (SDP) は、同じく錐最適化問題である線形計画問題 (LP) を一般化していることから、LP では定式化できない問題も求解可能となる。一方で、求解可能な行列のサイズや計算時間、ソルバー数では LP に劣る。また、同じ錐最適化問題に属する二重非負値計画問題 (DNN) は、組合せ最適化問題に対する凸緩和等において非常に有用であるが、その反面、SDP 以上に計算効率が悪く、非常に求解が困難な問題として知られている。

[1] の半正定値基底とは、階級 1 の半正定値行列からなる対称行列空間の基底であるが、[2] では、半正定値基底と似た集合を用いて、求解が困難な錐最適化問題を LP に外部近似し、上界を求める手法を提案し、計算機実験において性能を検証している。しかし、下界については考慮していない。本研究の目的は、求解が困難な錐最適化問題の上界については、[2] の改良手法を提案し、さらに下界についても求解手法を提案して、求解が困難な錐最適化問題のより精度の良い上界と下界を高速に求めることである。

## 2. 錐最適化問題

錐最適化問題とは、線形の制約と、変数行列  $X$  が内部が非空で尖状 ( $X, -X \in \mathcal{K} \Rightarrow X = 0$ ) な閉凸錐  $\mathcal{K}$  に含まれるという制約の下で、線形の目的関数を最大化する問題であり、以下のように表される。

$$(P) \quad \max \langle C, X \rangle \\ \text{s.t. } \langle A_i, X \rangle = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ X \in \mathcal{K}$$

ただし、 $C \in \mathcal{S}_n, A_i \in \mathcal{S}_n \quad (i = 1, \dots, m), b_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, m), \langle C, X \rangle = \text{Tr}(C^T X) = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} X_{ij}$  とする。 $\mathcal{S}_n$  は  $n$  次対称行列の集合を表す。

(P) を主問題としたとき、主問題 (P) に対する双対問題 (D) は以下のように書ける。

$$(D) \quad \min \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m A_i y_i + Z = C \\ Z \in \mathcal{K}^*$$

ここで、 $\mathcal{K}^*$  は  $\mathcal{K}$  に対する双対錐  $\mathcal{K}^* = \{X \in \mathcal{S}_n | \forall Y \in \mathcal{K}, \langle X, Y \rangle \geq 0\}$  である。

主問題 (P) において、 $\mathcal{K} = \mathcal{S}_n^+ = \{X \in \mathcal{S}_n | \forall d \in \mathbb{R}^n, d^T X d \geq 0\}$  とすると、この問題は SDP となる。また、主問題 (P) において、 $\mathcal{K} = \mathcal{S}_n^+ \cap \mathcal{N}_n = \{X \in \mathcal{S}_n | \forall d \in \mathbb{R}^n, d^T X d \geq 0, X \geq 0\}$  とすると、この問題は DNN となる。このとき、 $\mathcal{S}_n^+ \cap \mathcal{N}_n$  の双対錐  $\mathcal{K}^*$  は  $\mathcal{S}_n^+$  と  $\mathcal{N}_n$  の Minkowski 和である [3]。本研究では、錐最適化問題の中で DNN を取り上げる。

## 3. DNN の上界の求解

初めに、[2] の DNN の上界の求解手法について説明する。1 以上  $k$  個以下の非ゼロ要素を持ち、その値が 1 か  $-1$  であるベクトル全体の集合を  $\mathcal{U}_{n,k}$  と定義する。このとき、 $\mathcal{U}_{n,k}$  を  $\mathcal{U}_{n,k} = \{uu^T | u \in \mathcal{U}_{n,k}\}$  と定義する。[2] では、 $\mathcal{U}_{n,2}$  が階級 1 の半正定値行列のみを持つ集合であることから、DNN の錐制約 ( $X \in \mathcal{S}_n^+ \cap \mathcal{N}_n$ ) を  $X \in \mathcal{S}_n^+$  と  $X \in \mathcal{N}_n$  に分け、 $X \in \mathcal{S}_n^+$  について、任意の  $uu^T \in \mathcal{U}_{n,2}$  における  $\mathcal{S}_n^+$  の支持超平面で外部近似を考えると、DNN は以下のように表される。

$$(LP_{\text{out}}) \quad \max \langle C, X \rangle \\ \text{s.t. } \langle A_i, X \rangle = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ \langle u_i u_i^T, X \rangle \geq 0 \quad (\forall u_i u_i^T \in \mathcal{U}_{n,2}) \\ X \in \mathcal{N}_n$$

上記の問題は LP であり、DNN の上界を与える。本研究では、上記の問題を  $LP_{\text{out}}$  と呼ぶ。 $LP_{\text{out}}$  を考えることにより、DNN を直接求解することなく上界を得ることができ、大幅な計算効率の向上が期待される。更に、[2] では、切除平面を用いてより精度の良い上界を得ることを試みている。以下ではその手法を説明する。

初めに、 $LP_{\text{out}}$  を求解し、得られた最適解を  $X^*$  と

する。  $X^*$  が半正定値行列の場合、元問題 (DNN) の実行可能領域内のため、  $X^*$  は元問題 (DNN) の最適解となる。よって、  $X^*$  が元問題の最適解ではない場合、負の固有値を持つので、  $X^*$  の最小固有値に対応する固有ベクトルを  $u^*$  として、  $u^*$  を用いた階級 1 行列  $u^*u^{*T}$  を用いて新たな制約を追加し、以下の問題を求解する。

$$\begin{aligned}
 (\text{LP}_{\text{out}2}) \quad & \max \langle C, X \rangle \\
 \text{s.t.} \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\
 & \langle u_i u_i^T, X \rangle \geq 0 \quad (\forall u_i u_i^T \in U_{n,2}) \\
 & X \in \mathcal{N}_n \\
 & \langle u^* u^{*T}, X \rangle \geq 0
 \end{aligned}$$

$X^*$  の最小固有値は負より、  $\langle u^* u^{*T}, X^* \rangle = u^{*T} X^* u^* < 0$  となる。よって、  $\text{LP}_{\text{out}2}$  の実行可能領域は必ず  $\text{LP}_{\text{out}}$  の実行可能領域より小さくなる。本手法を繰り返すことで、より精度の良い上界を得ることを試みている。

#### 4. DNN の上界の求解手法の改良

[2] では切除平面を考える際、最小固有値に対応する固有ベクトルのみを用いて制約を追加していた。しかし、  $\text{LP}_{\text{out}}$  の最適解  $X^*$  には負の固有値が複数存在するケースが多いため、本研究では、最小固有値以外の負の固有値に対応する固有ベクトルについても、制約を追加することを考える。以下ではその手法を説明する。

$\text{LP}_{\text{out}}$  の最適解  $X^*$  における、負の固有値の数を  $e$  とする。その中で、制約として追加する割合を  $r \in (0, 1]$  とする。そして、各負の固有値について、固有値の小さいものから、対応する各固有ベクトルを  $u_i^*$  ( $i = 1, \dots, \lceil re \rceil$ ) として、固有ベクトルを用いた階級 1 行列  $u_i^* u_i^{*T}$  ( $i = 1, \dots, \lceil re \rceil$ ) を用いて新たな制約を追加し、以下の問題を求解する。

$$\begin{aligned}
 (\text{LP}_{\text{out}2}^r) \quad & \max \langle C, X \rangle \\
 \text{s.t.} \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\
 & \langle u_i u_i^T, X \rangle \geq 0 \quad (\forall u_i u_i^T \in U_{n,2}) \\
 & X \in \mathcal{N}_n \\
 & \langle u_i^* u_i^{*T}, X \rangle \geq 0 \quad (i = 1, \dots, \lceil re \rceil)
 \end{aligned}$$

固有ベクトル  $u_i^*$  ( $i = 1, \dots, \lceil re \rceil$ ) の固有値の負性より  $\langle u_i^* u_i^{*T}, X^* \rangle < 0$  ( $i = 1, \dots, \lceil re \rceil$ ) となる。よって、  $\text{LP}_{\text{out}2}^r$  の実行可能領域は必ず  $\text{LP}_{\text{out}}$  の実行可能領域より小さくなる。[2] の手法では、1 反復ごとに制約を 1 本加えているが、本手法を用いると、1 反復ごとに 1 本以上の実行可能領域を縮小させる制約を加え

ることが可能なため、計算効率の向上が期待される。

#### 5. DNN の下界の求解

[2] では、DNN の上界のみ考慮している。本研究では、[2] の手法を応用して、DNN の下界の求解手法を提案する。

初めに、DNN の双対問題を考え、双対問題の  $\sum_{i=1}^m A_i y_i + Z = C$  と錐制約 ( $Z \in \mathcal{S}_n^+ + \mathcal{N}_n$ ) を、  $\sum_{i=1}^m A_i y_i + Z \leq C$  と  $Z \in \mathcal{S}_n^+$  に等価に変形し、  $Z \in \mathcal{S}_n^+$  について、任意の  $uu^T \in U_{n,2}$  における  $\mathcal{S}_n^+$  の支持超平面で外部近似を考えると、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 (\text{LP}_{\text{in}}^*) \quad & \min \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m A_i y_i + Z \leq C \\
 & \langle u_i u_i^T, Z \rangle \geq 0 \quad (\forall u_i u_i^T \in U_{n,2})
 \end{aligned}$$

上記の問題は LP であり、DNN の下界を与える。本研究では、上記の問題を  $\text{LP}_{\text{in}}^*$  と呼ぶ。また、下界の求解についても、3 章、4 章の切除平面を用いた手法を適用し、LP を繰り返し解き、より精度の良い下界を得ることを試みる。

#### 6. 計算機実験

本実験では、ランダム生成した DNN と、ランダム生成した最大安定集合問題を用いて、各問題の上界と下界を求める。計算機実験に際し、上界に関しては、[2] の手法 ( $\text{LP}_{\text{out}}$ ) と提案手法 ( $\text{LP}_{\text{out}}^r$ ) を比較し、性能を評価した。下界に関しては、提案手法である  $\text{LP}_{\text{in}}^*$  の性能を評価した。なお、計算機は Intel(R) Core(TM) i7 950 CPU @3.07Ghz メモリ 12.0 GB を用いた。

計算機実験の結果、上界では、[2] に比べ良好な結果が得られ、さらに、下界においても精度の良い結果が得られた。

#### 参考文献

- [1] A. Tanaka and A. Yoshise, "LP-based tractable subcones of the semidefinite plus nonnegative cone," *Annals of Operations Research*, **265**, pp. 155–182, 2018.
- [2] A. A. Ahmadi, S. Dash and G. Hall, "Optimization over structured subsets of positive semidefinite matrices via column generation," *Discrete Optimization*, **24**, pp. 129–51, 2017.
- [3] A. Yoshise and Y. Matsukawa, "On optimization over the Doubly nonnegative cone," In *Proceedings of 2010 IEEE Multi-conference on Systems and Control*, pp. 13–19, 2010.

# Gauss–Seidel method for multi-leader-follower games

堀 篤史

南山大学大学院理工学研究科システム数理専攻 (現：三菱電機株式会社)  
指導教員：福島雅夫 南山大学 教授

## 1. 序論

マルチリーダー・フォロワー (multi-L/F) ゲームは、一部の複数プレイヤー (リーダー) にイニシアチブがあり、残りのプレイヤー (フォロワー) が彼らを追従するように戦略を決定するような階層型非協力ゲームである。その応用に、規制緩和された電力市場や通信市場などがある。

本研究では、multi-L/F ゲームを均衡制約をもつ均衡問題 (EPEC) と呼ばれる問題に再定式化することにより、元の問題がもつ数値的取り扱いにくさを解消する Gauss–Seidel 法を基盤とした 2 段階アルゴリズムを提案する。また、提案したアルゴリズムにおいて、強停留均衡点と呼ばれる解への収束性を証明し、数値実験によって有効性を確認した。

## 2. Multi-L/F ゲームと EPEC

本節では、本研究で扱う multi-L/F ゲームの問題設定と EPEC への再定式化を述べ、停留均衡の概念を述べる。

$N$  人のリーダーと 1 人のフォロワーによる multi-L/F ゲームを考える。リーダーのラベルを  $\nu$  ( $= 1, \dots, N$ ) とし、リーダー  $\nu$  の戦略を  $x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$  とする。また、それぞれのリーダーは費用関数  $\theta^\nu: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  と制約関数  $g^\nu: \mathbb{R}^{n_\nu} \rightarrow \mathbb{R}^r, h^\nu: \mathbb{R}^{n_\nu} \rightarrow \mathbb{R}^{s_\nu}$  が与えられているものとし、どれも  $C^2$  級とする。フォロワーは  $y \in \mathbb{R}^m$  と戦略とし、費用関数  $\gamma: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  と制約関数  $u: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^p$  が与えられているものとし、どれも  $C^3$  級とする。ここで、 $n := n_1 + \dots + n_N$  とする。リーダー  $\nu$  は与えられた戦略の組  $x^{-\nu} := (x^1, \dots, x^{\nu-1}, x^{\nu+1}, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^{n-n_\nu}$  と  $y \in \mathbb{R}^m$  に対して、次の最適化問題を解く。

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}} \quad & \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\ \text{s.t.} \quad & g^\nu(x^\nu) \leq 0, h^\nu(x^\nu) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

一方、フォロワーは与えられた戦略の組  $x := (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^n$  に対して、次の最適化問題を解く。

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} \gamma(x, y) \quad \text{s.t.} \quad u(x, y) \leq 0 \quad (2)$$

ここで、フォロワーの問題 (2) は任意に与えられた  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して、凸最適化問題と仮定すると、KKT 条件は問題 (2) に対する必要十分条件となり、以下の混合相補性問題として等価に扱うことができる。

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z, \lambda) &:= \begin{bmatrix} \nabla_y \gamma(x, y) + \nabla_y u(x, y) \lambda \\ u(x, y) + z \end{bmatrix} \\ &= 0 \\ 0 &\leq z \perp \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 \leq z \perp \lambda \geq 0 \quad (4)$$

ただし、 $\lambda \in \mathbb{R}^p$  を Lagrange 乗数とし、 $z \in \mathbb{R}^p$  を不等式制約  $u(x, y) \leq 0$  に対するスラック変数とする。方程式系 (3), (4) を問題 (1) の制約条件に取り込むことで、リーダー  $\nu$  の問題は以下のような  $x^{-\nu}$  をパラメータとする相補性制約をもつ数理計画問題 (PMPCC) として再定式化される。

$$\begin{aligned} \text{PMPCC}^\nu(x^{-\nu}): \quad & \min_{x^\nu, y, z, \lambda} \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\ \text{s.t.} \quad & g^\nu(x^\nu) \leq 0, h^\nu(x^\nu) = 0 \\ & \psi(x^\nu, x^{-\nu}, y, z, \lambda) = 0 \\ & 0 \leq z \perp \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

問題の組  $(\text{PMPCC}^\nu(x^{-\nu}))_{\nu=1}^N$  の均衡解を見つける問題は均衡制約をもつ均衡問題 (EPEC) と呼ばれる。変数  $(y, z, \lambda)$  はすべてのリーダーが共通にもつ決定変数のため、共有変数と呼ぶことにする。

一般に、EPEC は均衡解が存在する保証がないうえ、均衡解かどうかを確かめることは困難なため、本研究では均衡解の拡張概念である停留均衡解の求解を目標とする。なかでも、強い性質をもつ強停留均衡解を以下に定義する。

**定義.** 戦略の組  $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)$  が EPEC (もしくは multi-L/F ゲームの) 強停留均衡点であるとは、それぞれのリーダー  $\nu$  に対して、解  $(x^{\nu,*}, y^*, z^*, \lambda^*)$  が問題  $\text{PMPCC}^\nu(x^{-\nu,*})$  の強停留点 [1] となることである。

### 3. 提案手法

本節では、EPEC を解くためのアルゴリズムを提案し、multi-L/F の停留均衡を求める手法を二段階に分けて紹介する。

#### 3.1 Phase I: Gauss–Seidel 型ペナルティ法

準備として、問題の変換を行う。まず、相補性条件  $0 \leq z \perp \lambda \geq 0$  は Fischer–Burmeister (FB) 関数  $\phi(a, b) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$  によって、等価な等式制約として表せる。これにより、リーダー  $\nu$  の PMPCC $^\nu(x^{-\nu})$  は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} P^\nu(x^{-\nu}) : \quad & \min_{x^\nu, y, z, \lambda} \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\ \text{s.t.} \quad & g^\nu(x^\nu) \leq 0, h^\nu(x^\nu) = 0 \\ & \Psi(x^\nu, x^{-\nu}, y, z, \lambda) := \\ & \begin{bmatrix} \psi(x^\nu, x^{-\nu}, y, z, \lambda) \\ (\phi(z_i, \lambda_i))_{i=1}^p \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

しかし、FB 関数が微分可能ではないため、 $P^\nu(x^{-\nu})$  は数値的に取り扱いにくい。これを避けるために、二乗 FB 関数が連続的微分可能である性質を利用する。問題  $P^\nu(x^{-\nu})$  に対する緩和問題を次のように定める。

$$\bar{P}_\rho^\nu(x^{-\nu}) : \quad \min_{x^\nu, y, z, \lambda} \bar{\theta}_\rho^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y, z, \lambda)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_\rho^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y, z, \lambda) := & \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) + \frac{\rho}{2} \left[ \sum_{i=1}^{r_\nu} [g_i^\nu(x^\nu)]_+^2 \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{s_\nu} |h_i^\nu(x^\nu)|^2 + \sum_{j=1}^{m+2p} |\Psi_j(x^\nu, x^{-\nu}, y, z, \lambda)|^2 \right] \end{aligned}$$

とし、 $\rho > 0$  はペナルティパラメータである。また、 $[g_i^\nu(x^\nu)]_+ := \max\{0, g_i^\nu(x^\nu)\}$  とする。この問題の目的関数は微分可能である。

アルゴリズムの概要を説明する。 $k = 0, 1, 2, \dots$  をステップ数とする。各リーダーは緩和問題  $\bar{P}_{\rho_k}^\nu(x^{-\nu, (k)})$  を順に解き、適当な終了条件が満たされればアルゴリズムを終了し、そうでなければペナルティパラメータを更新して再び  $\nu = 1$  から  $N$  まで順に解く。このアルゴリズムに関して以下の結果を得た。

**定理.**  $\rho_k \rightarrow \infty$  とする。さらに、各リーダー  $\nu$  とステップ  $k$  に対して  $\bar{P}_{\rho_k}^\nu(x^{-\nu, (k)})$  の解は局所最適解と仮定する。また、解の点列に極限が存在し、極限において MPCC 一次独立制約想定と上位狭義相補性（文献 [1] を参照）が成り立つと仮定する。このとき、極限は multi-L/F ゲームの強停留均衡点である。

#### 3.2 Phase II: Refined Gauss–Seidel 法

前節のアルゴリズム (phase I) によって得られる解の精度は必ずしも高くないが、得られた近似解は相補性制約における有効制約を同定する意味で有用な情報となる。 $\bar{w}^{\nu, *} = (x^{\nu, *}, y^{\nu, *}, z^{\nu, *}, \lambda^{\nu, *})$  を phase I で得られたリーダー  $\nu$  の近似解<sup>1</sup> とする。相補性制約に関して、次のような有効制約集合を定義する。

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{I}}^\nu &:= \{i \mid |\bar{z}_i^{\nu, *}| < \delta, |\bar{\lambda}_i^{\nu, *}| \geq \delta\} \\ \bar{\mathcal{J}}^\nu &:= \{i \mid |\bar{z}_i^{\nu, *}| < \delta, |\bar{\lambda}_i^{\nu, *}| < \delta\} \\ \bar{\mathcal{K}}^\nu &:= \{i \mid |\bar{z}_i^{\nu, *}| \geq \delta, |\bar{\lambda}_i^{\nu, *}| < \delta\} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $\delta > 0$  は十分に小さい数とする。簡単のため、任意の  $\nu$  に対して、 $\bar{\mathcal{I}} := \bar{\mathcal{I}}^\nu, \bar{\mathcal{J}} := \bar{\mathcal{J}}^\nu, \bar{\mathcal{K}} := \bar{\mathcal{K}}^\nu$  が成り立つと仮定する。以下は近似解  $w^{\nu, *}$  付近で定義される“相補性制約を含まない”最適化問題である。

$$\begin{aligned} \tilde{P}^\nu(x^{-\nu}) : \quad & \min_{x^\nu, y, z, \lambda} \theta^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\ \text{s.t.} \quad & g^\nu(x^\nu) \leq 0, h^\nu(x^\nu) = 0 \\ & \psi(x^\nu, x^{-\nu}, y, z, \lambda) = 0 \\ & z_i = 0, \lambda_i \geq 0 \quad (i \in \bar{\mathcal{I}}) \\ & z_i = 0, \lambda_i = 0 \quad (i \in \bar{\mathcal{J}}) \\ & z_i \geq 0, \lambda_i = 0 \quad (i \in \bar{\mathcal{K}}) \end{aligned}$$

Phase II では、それぞれのリーダーが  $\tilde{P}^\nu(x^{-\nu})$  を順に解き、適当な終了条件（収束判定）が満たされれば、アルゴリズムを終了する。最終的に得られた解において、 $\tilde{P}^\nu(x^{-\nu})$  の KKT 条件がすべてのプレイヤーに対して成り立てば、強停留均衡点が求まったといえる。

Hu and Fukushima [2] の問題例を用いたところ、強停留均衡点が見つかったほか、[2] で得られた解よりも精密な解を得ることに成功した。また、解を更新する際、逐次過緩和法を用いることで、少ない反復回数で同程度の精度をもつ近似解を得ることに成功した。

#### 参考文献

- [1] H. Scheel and S. Scholtes, “Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality, and sensitivity,” *Mathematics of Operations Research*, **25**, pp. 1–22, 2000.
- [2] M. Hu and M. Fukushima, “Smoothing approach to Nash equilibrium formulations for a class of equilibrium problems with shared complementarity constraints,” *Computational Optimization and Applications*, **52**, pp. 415–437, 2012.

<sup>1</sup> 共有変数にラベル  $\nu$  を付すのは、一般に値が各リーダーによって異なるためである。