集団到着型無限サーバ待ち行列の安定性

矢島　萌子，フンドック　トゥアン，増山　博之

システム内に滞在する系内客数過程が唯一つの定常分布をもつとき，待ち行列モデルは安定であるといいます．無限個のサーバをもつ無限サーバ待ち行列モデルにおいても，集団が同時に到着することが許される場合には常に安定であるとは限りません．本稿では，集団到着型無限サーバ待ち行列モデルの安定性に関する研究について概説します．また，安定性の必要十分条件を導出する方法を紹介します．

キーワード：待ち行列理論，待ち行列の安定性，無限サーバ待ち行列，集団到着型待ち行列

1. はじめに

待ち行列理論の研究では，対象としている待ち行列モデルが安定であるかどうかが，しばしば重要な問題となります．待ち行列モデルは，システム内に滞在する客数（系内客数）を表す確率過程が唯一つの定常分布をもつとき，**安定**であるといいます [1]．待ち行列モデルは安定であるとき，系内客数の初期分布をどのように選んでも，同じ極限分布に収束します．待ち行列モデルが安定であるための必要十分条件は**安定条件**と呼ばれます．

有限個のサーバをもつ有限サーバ待ち行列モデルの場合，さまざまなモデルの安定条件がすでに明らかになっています．たとえば，GI/G/c 待ち行列の場合はどうでしょう．GI/G/c 待ち行列は，客が到着する間隔が互いに独立で任意の同一分布に従い (GI)，それぞれの客のサービス時間が互いに独立で任意の同一分布に従う (G)，c 個のサーバをもつ有限サーバ待ち行列モデルです．到着間隔とサービス時間の平均がそれぞれ λ と $\mathsf{E}[S]$ であるとき，これらのパラメータが次の不等式を満たすことが GI/G/c 待ち行列の安定条件です [1].

$$\lambda \mathsf{E}[S] < c \tag{1}$$

式 (1) は，単位時間当たりに到着する客のサービス要求量の合計が，平均的には単位時間当たりにシステム全体で処理できるサービス量より小さくなることを意味しており，直観的にとてもわかりやすいです．

一方で，無限個のサーバをもつ**無限サーバ待ち行列モデル**の場合はどのような安定条件になるのでしょうか．客が 1 人ずつ到着する無限サーバ待ち行列モデルは，サービスを提供するサーバが無限個存在するため（到着率と平均サービス時間が有限ならば）常に安定です．しかし，複数の客が同時に到着することが許される**集団到着型無限サーバ待ち行列モデル**は，常に安定であるとは限りません．システムに無限の数の客が同時に到着する可能性などを考慮しないといけないからです．

前述の GI/G/c 待ち行列の安定条件式 (1) と同様に直観を働かせると，集団到着型無限サーバ待ち行列モデルが安定であるためには，同時に到着する客数の平均が有限でなければならないと考えることもできます．しかし，結論からいえば，必ずしもその必要はありません．たとえば，Cong [2] は，集団到着型無限サーバ待ち行列モデルの一つである $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列の安定条件を導いており，その安定条件は同時に到着する客数の平均が発散する場合でも満たされることがあります．Cong [2] が導出した安定条件については，4 節で詳しく紹介しますが，GI/G/c 待ち行列の安定条件 (1) とは異なり，簡潔な直観的解釈を与えられる形にはなっていません．

集団到着型無限サーバ待ち行列モデルは常に安定でないので，定常解析などを行うときには，その安定性に関してしっかりと議論をするべきでしょう．しかし，安定条件がわかっている集団到着型無限サーバ待ち行列モデルはきわめて少なく，安定な集団到着型無限サーバ待ち行列モデルを扱う既存の研究の多くでは，唯一の定常な系内客数分布の存在自体を仮定するなど，モデルが安定であるための条件についてあまり深く触れ

やじま　もえこ
東京工業大学情報理工学院数理・計算科学系
〒 152–8552 東京都目黒区大岡山 2–12–1
ふんどっく　とぅあん
筑波大学システム情報系社会工学域
〒 305–8577 茨城県つくば市天王台 1–1–1
ますやま　ひろゆき
京都大学大学院情報学研究科
〒 606–8501 京都府京都市左京区吉田本町

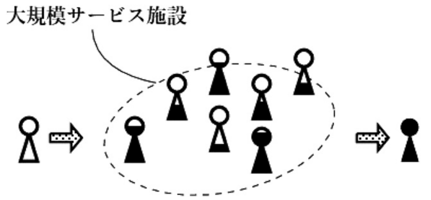

図1 無限サーバ待ち行列モデルによりモデル化される大規模施設のイメージ

ていません [3]．このような背景から，私たちは，より一般的な集団到着型無限サーバ待ち行列モデルの安定条件を導出する研究を始めました．

本稿では，集団到着型無限サーバ待ち行列モデルの安定性について，第 34 回待ち行列シンポジウムで報告した私たちの研究成果を含めて，現在までにわかっていることを紹介します．その前にまずは，2 節と 3 節で，集団到着型無限サーバ待ち行列モデルとはどのような待ち行列モデルであるかを詳しく説明します．

2. 無限サーバ待ち行列モデル

無限個のサーバをもつ無限サーバ待ち行列モデルでは，システムに到着した客は到着後すぐにサービスを受け始めることができます．無限サーバ待ち行列モデルは「待ち」の発生しない待ち行列モデルなのです．

ところで，無限個のサーバが存在するサービス施設を現実に想像することは難しく，無限サーバ待ち行列モデルによって適切にモデル化されるような状況はなかなか思い浮かばないでしょう．そのため，無限サーバ待ち行列モデルは，利用価値がなく無意味なモデルだと思ってしまう読者もいるかもしれません．ところが，意外にも無限サーバ待ち行列モデルはさまざまな状況をモデル化するために利用することができます．以下では，無限サーバ待ち行列モデルを利用するような状況の具体例を，三つ紹介したいと思います．

例 2.1　大規模施設の混雑現象のモデル化[1]

大型のショッピングモールを訪れる客は，自分の要求が満たされるまで買い物をしたり映画を観たりして施設内に滞在して，満足したら帰っていきます．ショッピングモールを訪れる客が施設内に滞在する行為自体をサーバでサービスを受けていると捉えると，ショッピングモールの滞在客数過程は無限サーバ待ち行列モデルの客数過程として表すことができます．

例 2.2　有限サーバ待ち行列モデルの近似

有限サーバ待ち行列モデルと比べると，無限サーバ待ち行列モデルのほうが，解析が容易であることが多いです．そのため，本来ならば多くのサーバをもつ有限サーバ待ち行列モデルを用いるほうが適切な場合でも，無限サーバ待ち行列モデルを用いてモデル化を行い，近似的な評価指標を得ることがあります [5]．

例 2.3　ソフトウェアのフォールト認知過程 [6]

ソフトウェアの信頼性は，プログラムなどが要求どおりに誤りなく機能できるかどうかを表す尺度の一つであり，ソフトウェアの開発段階でテスト工程を行うことで評価されます．テスト工程では，ソフトウェアの故障を非斉時ポアソン過程に従うように発生させます．故障が発生すると，ある分布に従う時間をかけてフォールト（バグ・設計ミスなど）を発見します．このような状況において，時間 $(0, t]$ に発見された総フォールト数を $N(t)$ とすると，確率過程 $\{N(t)\}$ は $\mathrm{M}(t)/\mathrm{G}/\infty$ 待ち行列の退去過程として表すことができます．

3. 集団到着型待ち行列モデル

集団到着型待ち行列モデルは，複数の客が同時に到着することが許される待ち行列モデルです．同時に到着する客のまとまりは，**集団**と呼ばれます．また，一つの集団に属する客数は，**集団の大きさ**と呼ばれます．一般的に，集団到着型待ち行列モデルでは，ある時刻に複数の「客」が同時に到着するのではなく，一つの「集団」が到着すると捉えてモデルを扱います．システムに到着した後は，集団としてではなく，それぞれ客として独立に振る舞います．

集団到着型待ち行列モデルを用いてモデル化を行う状況は，身近にも多く存在します．たとえば，遊園地のアトラクションの待機列を待ち行列モデルを用いてモデル化することを考えます．アトラクションに並ぶ人々は，グループとして何人かで一緒に並ぶため，この場合は集団到着型待ち行列モデルを用いてモデル化することが適切でしょう．

システムに到着する集団の到着時刻と集団の大きさを表す確率過程は**集団到着過程**と呼ばれます．集団到着過程の代表例としてまず挙げられるのが，集団ポアソン到着過程です．集団ポアソン到着過程では，集団はポアソン過程に従って到着して，それぞれの集団の大きさは互いに独立で同一の分布に従います．ほかにも，**マルコフ型集団到着過程**[2](batch Markovian ar-

[1] このようなモデル化の方法と解析手法については，増山と滝根 [4] の記事で詳しく紹介されています．

[2] 5.1 節を参照．

rival process: **BMAP**) [7] などが，待ち行列理論でよく用いられる集団到着過程です．

4. 集団到着型無限サーバ待ち行列モデルの安定性

集団到着型無限サーバ待ち行列モデルの安定性は，これまであまり研究されてきませんでした．本節では，数少ない集団到着型無限サーバ待ち行列の安定条件に関する先行研究である，**$\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列**の安定条件を導出した Cong の研究 [2] を紹介します．

$\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列は，集団ポアソン到着過程に従って集団が到着して，それぞれの客のサービス時間が独立で指数分布に従う集団到着型無限サーバ待ち行列モデルです．$\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列は，基本的な集団到着型無限サーバ待ち行列モデルであり，解析的にとても扱いやすい構造をもっています．Cong [2] は，この $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列の安定条件に関する次の定理 4.1 を導出しました．

定理 4.1 (Cong [2])**.** $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列の安定条件は，LBSM 条件である．

定理 4.1 に登場する **LBSM 条件** (logarithmic batch-size moment condition) は，次のとおりに定義されます．

定義 4.2 (LBSM 条件)**.** ある集団到着型待ち行列モデルの集団の大きさを表す確率変数を X とする．X の対数期待値が有界な値をもつとき，すなわち，ある $C > 0$ が存在して，

$$\mathsf{E}[\log(X + \mathrm{e})] \le C$$

を満たすとき，この待ち行列モデルは LBSM 条件を満たすという．

つまり，$\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列の安定条件が LBSM 条件であるということは，$\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列の安定条件が集団の大きさの従う分布の対数期待値が有界であることを意味しています．

さらに，LBSM 条件の定義から，$\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列が安定であるために，集団の大きさが従う分布の期待値が有限でなくてもよいことがわかります．たとえば，確率変数 X の分布が次の式で与えられる場合には期待値は発散しますが，対数期待値は有界であることが，すぐに確かめられます．

$$\mathsf{P}(X = k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$$

私たちは，Cong [2] が安定条件を導出した過程から，集団の大きさの分布とサービス分布の裾[3]の減衰率が無限サーバ待ち行列モデルの安定性に大きく寄与しており，それ以外の要素が安定条件に与える影響は少ないという予想を立てました．そこでまず，私たちは，サービス時間分布は $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\infty$ 待ち行列と同じく指数分布に従い，BMAP に従って集団が到着する無限サーバ待ち行列モデルの安定性について考えました．そして，この集団到着型無限サーバ待ち行列モデルの安定条件が LBSM 条件であることを示しました [8]．この内容については， 5 節で詳しく紹介します．

さらに，サービス分布の裾の減衰率が無限サーバ待ち行列モデルの安定性に大きく寄与するという予想から，BMAP に従って集団が到着して，客のサービス時間が従う分布の裾が指数分布より速く減衰するような無限サーバ待ち行列モデルの安定性について考えることにしました．そして，私たちは，LBSM 条件が成立するとき，この集団到着型無限サーバ待ち行列モデルは安定であることを示しました [9]．この内容については， 6 節で詳しく紹介します．

5. BMAP/M/∞ 待ち行列の安定条件

BMAP/M/∞ 待ち行列は，BMAP に従って集団が到着して，それぞれの客のサービス時間が独立で同一の指数分布に従う集団到着型無限サーバ待ち行列モデルです．私たちは，この BMAP/M/∞ 待ち行列の安定条件に関する次の定理 5.1 を導出しました．

定理 5.1 (Yajima et al. [8])**.** BMAP/M/∞ 待ち行列の安定条件は，LBSM 条件である．

BMAP は，Cong [2] が扱っている集団ポアソン到着過程を特別な場合として含んでいる集団到着過程です．

5.1 マルコフ型集団到着過程 (BMAP)

BMAP は代表的な集団到着過程の一つで，集団ポアソン到着過程やマルコフ型到着過程 [4](Markovian arrival process: MAP) など，待ち行列理論でよく用いられる到着過程や集団到着過程を多く包含しています．さらに，一つずつ到着が発生する任意の定常な到着過程は，MAP によって任意の精度で近似することができます [10]．

[3] 6.1 節を参照．
[4] 集団の大きさが確率 1 で 1 に等しい BMAP のこと．

BMAP には，背後状態あるいはフェーズと呼ばれるものが存在し，それらは到着のしやすさに影響を及ぼす「環境」に相当します．また，背後状態の時間変化は，有限の状態空間をもつ連続時間マルコフ連鎖 $\{J(t); t \ge 0\}$ によって表現されます．これ以降，マルコフ連鎖 $\{J(t)\}$ のことを**背後マルコフ過程**と呼ぶことにします．

このような特徴をもつ BMAP は，どのように定式化されるのでしょうか．まず，背後マルコフ過程 $\{J(t)\}$ は既約であり，有界な状態空間 $\mathbb{D} := \{1, 2, \dots, d\}$ をもつとします．時間 $(0, t]$ に到着する客の総数を $N(t)$ と記すと，BMAP は次の式によって定義されます．ただし，$k \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \dots\}$,$i, j \in \mathbb{D}$ とします．

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(N(t+\Delta t) - N(t) = k, J(t+\Delta t) = j | J(t) = i) \\ &\quad = \begin{cases} 1 + D_{i,i}(0)\Delta t + o(\Delta t), & k = 0, j = i \\ D_{i,j}(k)\Delta t + o(\Delta t), & \text{その他} \end{cases}\end{aligned} \tag{2}$$

式 (2) の係数を行列化して $\boldsymbol{D}(k) := (D_{i,j}(k))_{i,j\in\mathbb{D}}$ としたとき，$\boldsymbol{D}(0)$ は負の対角成分と非負の非対角成分をもつ優対角行列であるとします．そして，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{D}(k)$ は非負行列であり，行列 $\boldsymbol{D} := \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{D}(k)$ は背後マルコフ過程 $\{J(t)\}$ の状態変化を支配する推移率行列であるとします．さらに，待ち行列理論で BMAP を扱うときは，次の式を仮定することが多いです．

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0} \tag{3}$$

ただし，$\boldsymbol{e}$ は要素がすべて 1 の列ベクトル，$\boldsymbol{0}$ は要素がすべて 0 の列ベクトルです．式 (3) を仮定することで，任意の時刻から有限時間内に（確率 1 で）集団が到着することが保障されます．

このように定義される BMAP の累計到着客数過程 $\{N(t)\}$ と背後マルコフ過程 $\{J(t)\}$ の結合確率過程は，連続時間マルコフ連鎖になっていることが，式 (2) からわかります．このマルコフ性のおかげで，BMAP は解析的に扱いやすくなっています．状態空間 $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{D}$ をもつ連続時間マルコフ連鎖 $\{(N(t), J(t))\}$ の推移率行列は，次のように規則的な構造をもちます．

$$\begin{array}{c} \\ \mathbb{L}(0) \\ \mathbb{L}(1) \\ \mathbb{L}(2) \\ \mathbb{L}(3) \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbb{L}(0) & \mathbb{L}(1) & \mathbb{L}(2) & \mathbb{L}(3) & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}(0) & \boldsymbol{D}(1) & \boldsymbol{D}(2) & \boldsymbol{D}(3) & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}(0) & \boldsymbol{D}(1) & \boldsymbol{D}(2) & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}(0) & \boldsymbol{D}(1) & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \tag{4}$$

ただし，$\boldsymbol{O}$ はゼロ行列を表すとします．また，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$\mathbb{L}(n) := \{n\} \times \mathbb{D}$ とします．推移率行列 (4) を見ると，BMAP という集団到着過程は，行列の集合 $\{\boldsymbol{D}(k); k \in \mathbb{Z}_+\}$ により特徴づけられることがわかります．

5.2　テスト関数による判定手法を用いた証明

次に，定理 5.1 の証明で用いた手法を紹介します．ちなみに，式 (2) で定義される BMAP に従って集団が到着する BMAP/M/∞ 待ち行列が LBSM 条件を満たすということは，ある $C > 0$ が存在して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(n + \mathrm{e})\boldsymbol{D}(n)\boldsymbol{e} \le C\boldsymbol{e} \tag{5}$$

を満たすことと同値です．

まず，考えている BMAP/M/∞ 待ち行列の時刻 t での系内客数を $L(t)$ とします．定理 5.1 の証明において最も重要な点は，客数過程と背後マルコフ過程の結合確率過程 $\{(L(t), J(t))\}$ が，状態空間 $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{D}$ をもつ連続時間マルコフ連鎖であることです．

必要性の証明では，唯一の定常な系内客数分布が存在するときマルコフ連鎖 $\{(L(t), J(t))\}$ の平衡方程式と（確率の）正規化条件が成り立つため，これらからすぐに LBSM 条件を導くことができます．

一方で，十分性の証明では，補題 5.2 を利用します．

補題 5.2 (Tweedie [11])**.** 推移率行列 $\boldsymbol{Q} := (q_{i,j})_{i,j\in\mathbb{S}}$ をもつ離散状態空間 $\mathbb{S}$ 上の既約な連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t)\}$ に対して，次の (i) および (ii) を満たす，下に有界な実数値関数 $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ が存在するとき，$\{X(t)\}$ は正再帰的である．

(i) $y(s) := \sum_{p\in\mathbb{S}} q_{s,p} f(p)$ が任意の $s \in \mathbb{F}$ で有限な値をとる．

(ii) ある $\varepsilon > 0$ が存在して，有限個の要素を除く $s \in \mathbb{S}$ で $y(s) \le -\varepsilon$ となる．

なお，既約な連続時間マルコフ連鎖が正再帰的であることは，唯一の極限分布が存在することと同値です．

補題 5.2 で登場する関数 f はテスト関数と呼ばれます．補題 5.2 では，条件 (i) および (ii) を満たすテスト関数が存在するかどうかで，連続時間マルコフ連鎖の正再帰性を判定しています．補題 5.2 は連続時間マルコフ連鎖に対する正再帰性の判定手法ですが，離散時間マルコフ連鎖に対してもフォスターの定理 [12] と呼ばれる補題 5.2 と類似の判定手法が存在します．フォスターの定理や補題 5.2 を利用することは，マルコフ

連鎖の正再帰性を判定するための常套手段です（ただし，条件を満たすようなテスト関数を見つけることは，それほど簡単なことではありません）．

定理 5.1 の十分性の証明では，LBSM 条件が成り立つとき $\{(L(t), J(t))\}$ が正再帰的であるかを判定するために，テスト関数 f として，

$$f(k, i) = \log(k + \mathrm{e}), \quad (k, i) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{D} \tag{6}$$

を選びます．詳しい証明はここでは紹介しませんが，式 (6) の関数 f は LBSM 条件が成り立つときに補題 5.2 の条件 (i) および (ii) を満たすため，定理 5.1 の十分性が証明されます．

5.3　BMAP/PH/∞ 待ち行列の安定条件

BMAP/PH/∞ 待ち行列は，BMAP に従って集団が到着して，それぞれの客のサービス時間が独立で同一の相型分布（PH 分布）に従う集団到着型無限サーバ待ち行列モデルです．相型分布は，連続時間吸収マルコフ連鎖が吸収されるまでの時間が従う確率分布であり，指数分布を特別な場合として含んでいます．任意の $[0, \infty)$ 上の一般分布はある相型分布列の弱収束先として表すことができます [10]．

このような BMAP/PH/∞ 待ち行列の安定条件は（BMAP/M/∞ 待ち行列の安定条件と同じく）LBSM 条件であることが，5.2 節で紹介した方法と同じような方法で証明することができます [13]．

6.　裾が軽いサービス分布をもつ BMAP/G/∞ 待ち行列の安定性

5 節では，BMAP/M/∞ 待ち行列の安定条件が LBSM 条件になることを紹介しました．次に本節では，BMAP/M/∞ 待ち行列よりも一般的なモデルである BMAP/G/∞ 待ち行列の安定性について考えます．BMAP/G/∞ 待ち行列は，BMAP に従って集団が到着して，それぞれの客のサービス時間が独立で同一の分布に従う集団到着型無限サーバ待ち行列モデルです．

私たちは，**サービス時間が裾が軽い分布に従う場合の BMAP/G/∞ 待ち行列**の安定性に関する次の定理 6.1 を導出しました．

定理 6.1 (Yajima et al. [9])**．** LBSM 条件が成り立つとき，裾が軽いサービス分布をもつ BMAP/G/∞ 待ち行列は安定である．

6.1　裾が軽い分布

非負実数値分布関数 $F(x)$ の補分布関数 $\overline{F}(x) := 1 - F(x)$ は，x が大きな値を取る領域では，**分布の裾**と呼ばれることがあります．

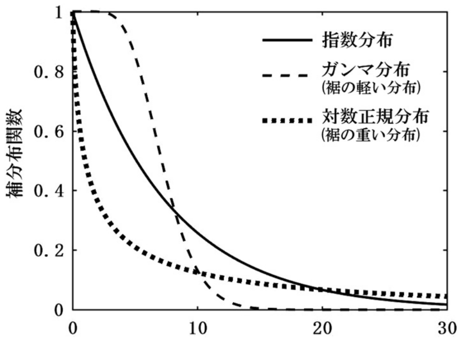

図 2　分布の裾の比較

分布の裾の減衰速度によって，分布関数を分類することができます．最も大まかな分類の仕方は「**裾が軽い分布族**」と「**裾が重い分布族**」に分ける方法です．前者には分布の裾が指数分布の裾と同等もしくはそれより速く減衰する分布が含まれ，後者には分布の裾が指数分布の裾より緩やかに減衰する分布が含まれます．裾の軽い分布の例としては，指数分布やガンマ分布などが挙げられます．また，裾の重い分布の例としては，対数正規分布やパレート分布などが挙げられます．前述のとおり，私たちの研究 [9] では，サービス時間が裾の軽い分布に従う場合に着目して，BMAP/G/∞ 待ち行列の安定性について考えました．サービス時間分布の裾が軽いということは，サービス時間が極端に大きくなりにくいことを意味します．

また，分布 $F(x)$ の裾が軽いというのは，数学的には次の式で定義されます．

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x)}{\mathrm{e}^{-\theta x}} = 0, \quad \text{for some } \theta > 0 \tag{7}$$

裾の軽い分布は任意次のモーメントが有限であることが，式 (7) の定義からわかります．

6.2　再生型確率過程の構造を利用した証明

次に，定理 6.1 の証明で用いた手法を紹介します．まず，考えている待ち行列モデルの時刻 t での系内客数を $L(t)$ とします．客数過程と背後マルコフ過程の結合確率過程 $\{(L(t), J(t))\}$ は，BMAP/M/∞ 待ち行列の場合とは異なり，連続時間マルコフ連鎖ではありません．そのため，5.2 節で紹介したような方法で定理 6.1 の証明を行うことはできません．

そこで，定理 6.1 の証明では，$\{(L(t), J(t))\}$ が**再生型確率過程 (regenerative process)** であることに着目します．再生型確率過程は，次のように定義されます

([14] 参照).

定義 6.2（再生型確率過程）**.** $\{X(t); t \geq 0\}$ を右連続な標本路をもつ確率過程とする．また，$\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を $0 = T_0 \leq T_1 < T_2 < \cdots$ を満たす確率変数列とする．各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$R_n(t)$ を次のように定義する．

$$R_n(t) = X(t + T_n), \quad 0 \leq t < T_{n+1} - T_n$$

確率過程 $\{R_n(t); 0 \leq t < T_{n+1} - T_n\}$ が異なる $n \in \mathbb{Z}_+$ について互いに独立であり，任意の $n \in \mathbb{N}$ で確率過程として同じ分布をもつとき，$\{X(t); t \geq 0\}$ は $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を**再生点**としてもつ再生型確率過程と呼ばれる．

背後状態 $i_0 \in \mathbb{D}$ を適当に選ぶと，$\{(L(t), J(t))\}$ は状態 $(0, i_0)$ を訪れる時刻を再生点としてもつ再生型確率過程であることは，BMAP のマルコフ性からすぐにわかります．

確率過程 $\{(L(t), J(t))\}$ が再生型確率過程であるため，定理 6.1 の証明では，再生型確率過程の定常性に関する次の補題 6.3 を用いることができます．

補題 6.3（Thorisson [15]）**.** 確率過程 $\{X(t)\}$ を時刻 $0 \leq T_1 < T_2 < \cdots$ を再生点としてもつ再生型確率過程とする．$\{X(t)\}$ が唯一の定常分布をもつことは，平均再生間隔が有限であること，すなわち，

$$\mathsf{E}[T_2 - T_1] < \infty$$

が成り立つことと同値である．

すなわち，LBSM 条件が成り立つときに $\{(L(t), J(t))\}$ が唯一の定常分布をもつことを示すためには，LBSM 条件が成り立つときに再生型確率過程 $\{(L(t), J(t))\}$ の平均再生間隔が有限であることを示せばよいのです．そして，平均再生間隔の有限性を示すためには，再生理論の有名な定理の一つである**再生報酬定理**（[16] 参照）を利用します．

補題 6.4（再生報酬定理）**.** 確率過程 $\{X(t)\}$ を $0 \leq T_1 < T_2 < \cdots$ を再生点としてもつ再生型確率過程とする．$\{X(t)\}$ が時刻 $(0, t]$ に再生する回数を $M(t)$ と記す．

n 番目の再生が起こる時刻 T_n に報酬 R_n を受け取る状況を考える．報酬 R_n は確率過程 $\{X(t); T_{n-1} < t \leq T_n\}$ により決定する確率変数であるとき，次の式が（確率 1 で）成立する．

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{M(t)} R_n = \frac{1}{\mathsf{E}[T_2 - T_1]} \cdot \mathsf{E}[R_1] \qquad (8)$$

ただし，$\mathsf{E}[T_2 - T_1] = \infty$ のときは $1/\mathsf{E}[T_2 - T_1] = 0$ とする．

再生報酬定理は，再生時刻に得る報酬の時間平均と事象平均が一致することを主張しています．

定理 6.1 の証明では，$n-1$ 番目の再生点と n 番目の再生点の間に $\{(L(t), J(t))\}$ が状態 $(0, i_0)$ に留まる時間を報酬 R_n として，再生報酬定理を利用しています．このように報酬を定めると，報酬の平均 $\mathsf{E}[R_1]$ は有限な値をもちます．あとは，式 (8) の左辺の極限が正の値に収束することを示すことで，$1/\mathsf{E}[T_2 - T_1]$ が正の値をもつこと，すなわち $\mathsf{E}[T_2 - T_1]$ が有限であることが示されます．

7. おわりに

本稿では，集団到着型無限サーバ待ち行列モデルの安定性について解説しました．特に，6 節で紹介した内容は，今号で特集されている第 34 回待ち行列シンポジウムにて，私たちが報告した研究成果です．

参考文献

[1] R. M. Loynes, “The stability of a queue with non-independent inter-arrival and service times,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **58**, pp. 497–520, 1962.

[2] T. D. Cong, “On the $\mathrm{M}^X/\mathrm{G}/\infty$ queue with heterogeneous customers in a batch,” *Journal of Applied Probability*, **31**, pp. 280–286, 1994.

[3] H. Masuyama and T. Takine, “Analysis of an infinite-server queue with batch Markovian arrival streams,” *Queueing Systems*, **42**, pp. 269–296, 2002.

[4] 増山博之，滝根哲哉，“大規模施設の混雑現象―待ち行列理論によるアプローチ―，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**49**(7), pp. 422–425, 2004.

[5] W. Whitt, “Understanding the efficiency of multi-server service systems,” *Management Science*, **38**, pp. 708–723, 1992.

[6] T. Dohi, S. Osaki and K. S. Trivedi, “An infinite server queueing approach for describing software reliability growth: Unified modeling and estimation framework,” In *Proceedings of the 11th Asia-Pacific Software Engineering Conference (APSEC’04)*, pp. 110–119, 2004.

[7] D. M. Lucantoni, “New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process,” *Stochastic Models*, **7**, pp. 1–46, 1991.

[8] M. Yajima, T. Phung-Duc and H. Masuyama, “The stability condition of BMAP/M/∞ queues,” In *Proceedings of the 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applica-*

tions (QTNA2016), Article number: 5, 2016.

[9] 矢島萌子，フンドック トゥアン，増山博之，“マルコフ型集団到着過程と裾の軽いサービス分布を持つ無限サーバ待ち行列の安定性の十分条件，”2017 年度待ち行列シンポジウム報文集，pp. 145–152, 2018.

[10] S. Asmussen and G. Koole, “Marked point processes as limits of Markovian arrival streams,” *Journal of Applied Probability*, **30**, pp. 365–372, 1993.

[11] R. L. Tweedie, “Sufficient conditions for regularity, recurrence and ergodicity of Markov processes,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **78**, pp. 125–136, 1975.

[12] F. G. Foster, “On the stochastic matrices associated with certain queuing processes,” *The Annals of Mathematical Statistics*, **24**, pp. 355–360, 1953.

[13] M. Yajima, T. Phung-Duc and H. Masuyama, “The stability condition of BMAP/PH/∞ queues,” In *Proceedings of the 12th International Conference on Queueing Theory and Network Applications (QTNA2017)*, pp. 82–85, 2017.

[14] 宮沢政清，『確率と確率過程』，近代科学社，1993.

[15] H. Thorisson, “Construction of a stationary regenerative process,” *Stochastic Processes and their Applications*, **42**, pp. 237–253, 1992.

[16] R. W. Wolff, *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Pearson, 1989.