

金融市場における価格インパクトを考慮した取引執行ゲーム

大西 匡光, 下清水 慎

金融市場には、その売買取引が資産の市場価格にインパクトを与えるようなラージ・トレーダーが存在する。本稿では、筆者らがごく最近に提案した一般化された市場価格インパクト・モデルのもとで、2人のラージ・トレーダーによって為される戦略的な取引執行の問題をマルコフ・ゲーム（確率ゲーム）として定式化し、そのマルコフ完全均衡を導出して特徴付ける。さらに幾種類かの設定のもとでの興味深い数値計算例を示す。

キーワード：ラージ・トレーダー、価格インパクト、取引執行、マルコフ・ゲーム、マルコフ完全均衡

1. はじめに

自らの取引が市場価格に影響を及ぼす機関投資家のような投資家をラージ・トレーダーと呼び、その価格変動を価格インパクトと呼ぶ。たとえば、巨額の年金ファンドを運用する年金運用機関は、その多数の年金加入者からの年金拠出によるキャッシュ・インフロー、逆にその多数の年金加入者への年金給付によるキャッシュ・アウトフローが起こる定期的なタイミングにおいて、それぞれ大量・巨額の運用資産の購入、売却を行わなければならない。そのような場合、金融市場に大きな価格インパクトを及ぼす。

ラージ・トレーダーは、売買取引の際の価格インパクトを流動性リスクとして認識し、さらにその将来の市場価格変動をも価格リスクとして捉えて、それらを併せて適切に総合的なリスク・マネジメントを行わなければならない。こうした価格インパクトを考慮した取引執行戦略の研究が、Bertsimas and Lo [1], Almgren and Chriss [2] をはじめとして、近年、とりわけ、我が国ではリーマン・ショックと呼ばれる、先の世界的金融危機以降、アルゴリズム取引・高頻度取引への関心と相まって、盛んに行われている（たとえば Cartea et al. [3] 参照）。

本稿においては、離散時間モデルを用い、筆者らが最近提案した価格インパクト・モデルをさらに一般化

した価格変動モデルに基づき、

§2 まずは CARA (Constant Absolute Risk Aversion, 負の指数) 型の効用関数をもつラージ・トレーダーの、購入計画期間における最終時点での手持ち資金(富)からの期待効用を最大化する問題(最適取引執行問題)をマルコフ決定過程として定式化し、確率動的計画法を適用することより、最適取引執行戦略を導出する。

§3 続いて、CARA 型の効用関数をもつ2人のラージ・トレーダーの、購入計画期間における最終時点での手持ち資金(富)からの期待効用を最大化しようとする問題(取引執行ゲーム)をマルコフ・ゲーム(確率ゲーム)として定式化し、際立ったマルコフ完全均衡取引執行戦略を導出する。

§4 そして最後に上記の両問題に対して幾種類かの設定のもとでの数値計算例を与え、比較静学分析を行う。

なお、本稿の内容は、主として、筆者らの論文 Ohnishi and Shimoshimizu [4] に基づいている。また、本稿を作成するにあたって文献 [5-11] を参考にした。

2. 最適取引執行問題

定められた時点 $T+1$ ($\in \mathbb{Z}_+ := \{1, 2, \dots\}$) までに、規定量 Q ($\in \mathbb{R}$) の単一のリスク資産(株式、など)を購入しようとするラージ・トレーダーを考える。時点 t ($= 1, \dots, T$) における、ラージ・トレーダーの提出する購入注文量(執行量)を q_t とし(ただし、購入の時 $q_t > 0$, 売却の時 $q_t < 0$)、時点 t ($= 1, \dots, T, T+1$) における残余購入量を \bar{Q}_t (ただし、 $\bar{Q}_1 = Q$)、また、手持ち資金(富)を w_t で表す。

リスク資産の時点 t における市場価格(気配値)を p_t とする。ラージ・トレーダーの提出する購入注文は、

おおにし まさみつ
大阪大学大学院経済学研究科、数理・データ科学教育研究センター
〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-7
ohnishi@econ.osaka-u.ac.jp
しもしみず まこと
大阪大学大学院経済学研究科、学術振興会特別研究員
〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-7
shimosshi194@gmail.com

大量であるが故にその価格 p_t では執行されず、付加的なコストを伴い、執行価格 \hat{p}_t で執行されるものとする。 v_t を他の（スモール・）トレーダーたちの総提出注文量を表す外生的な確率変数とし、 $\lambda_t, \kappa_t (\geq 0)$ で、それぞれラージ・トレーダーと他のトレーダー達の単位執行量あたりの価格の感応度（インパクト）を表すものとする。そして、執行価格は線形価格インパクトモデル

$$\hat{p}_t = p_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t), \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

に従うものとする。また、つぎの時点での市場価格 p_{t+1} は、価格の回復率 $\alpha_t (\in [0, 1])$, 回復速度 $\rho (\in [0, \infty))$ を用いて、過去の価格インパクトの残存効果を

$$\begin{aligned} r_{t+1} &:= \sum_{k=1}^t (\lambda_k q_k + \kappa_k v_k) \alpha_k e^{-\rho((t+1)-k)} \\ &= e^{-\rho} \sum_{k=1}^{t-1} (\lambda_k q_k + \kappa_k v_k) \alpha_k e^{-\rho(t-k)} \\ &\quad + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \alpha_t e^{-\rho} \\ &= [r_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \alpha_t] e^{-\rho} \end{aligned} \quad (2)$$

と表せば、ファンダメンタル価格 $p_t^f := p_t - r_t$ のダイナミクスは

$$\begin{aligned} p_{t+1}^f &= p_{t+1} - r_{t+1} \\ &= p_t - r_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) (1 - \alpha_t) + \varepsilon_t \\ &= p_t^f + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) (1 - \alpha_t) + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3)$$

を満たす。したがって、市場価格のダイナミクスは

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t - (1 - e^{-\rho}) r_t \\ &\quad + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \{ \alpha_t e^{-\rho} + (1 - \alpha_t) \} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。ただし、 ε_t は、時点 t から時点 $t+1$ までの公的な情報の更新に伴う確率変数とし、時点 $t+1$ において、ラージ・トレーダーによって認識されるものとし、列 $(v_t, t = 1, \dots, T)$, $(\varepsilon_t, t = 1, \dots, T)$ は、それぞれ、独立な確率変数列で、

$$v_t \sim N(\mu_{v_t}, \sigma_{v_t}^2); \quad \varepsilon_t \sim N(\mu_{\varepsilon_t}, \sigma_{\varepsilon_t}^2) \quad (5)$$

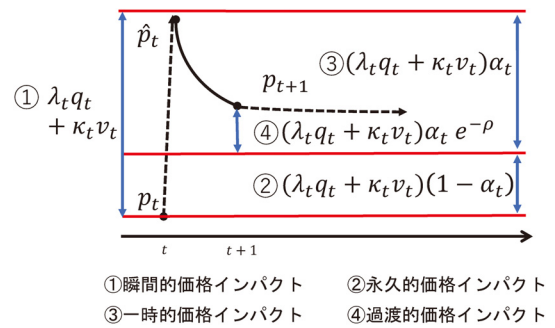
と従い、さらに、それらの列は互いに独立であるとする。ラージ・トレーダーの残余執行量に関しては、

$$\bar{Q}_{t+1} = \bar{Q}_t - q_t \quad (6)$$

を満たし、また手持ち資金（富）に関しては、

$$w_{t+1} = w_t - \hat{p}_t q_t = w_t - \{ p_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \} q_t \quad (7)$$

と表せる。



①瞬間的価格インパクト ②永久的価格インパクト
③一時的価格インパクト ④過渡的価格インパクト

図1 価格インパクトの図による説明

最後に、このモデルにおいては、 $(1 - \alpha_t) \lambda_t, \alpha_t \lambda_t, \alpha_t \lambda_t e^{-\rho k}$ が、それぞれ、ラージ・トレーダーの執行による、恒久的インパクト、一時的インパクト、過渡的インパクトを表している（図1）。

注 2.1. $((v_t, \varepsilon_t), t = 1, \dots, T)$ が（相関をもつ）2変量正規分布に従う、独立な2変量確率ベクトル列としても、煩雑にはなるが、同様の分析が可能である。

2.1 マルコフ決定過程としての定式化

ラージ・トレーダーの最適取引執行問題を下記のよなマルコフ決定過程として定式化し、分析する。

・時点 $t (= 1, \dots, T)$ での状態は四つ組

$$s_t := (w_t, p_t, \bar{Q}_t, r_t) \in \mathbb{R}^4 \quad (8)$$

で表される。

・時点 $t (= 1, \dots, T)$ での履歴に依存しない1ステージの（非確率的な）意思決定規則 f_t は状態 $s_t \in S := \mathbb{R}^4$ を行動 $q_t = f_t(s_t) \in A := \mathbb{R}$ に写すボレル可測関数

$$f_t : s_t \in S = \mathbb{R}^4 \mapsto q_t \in A = \mathbb{R} \quad (9)$$

として定義される。

・状態推移のダイナミクスは、式(2), (4), (6), (7)を纏めて

$$s_{t+1} = h_t(s_t, q_t, (v_t, \varepsilon_t)), \quad t = 1, \dots, T \quad (10)$$

と表される。

・ラージ・トレーダーへの（効用）ペイオフは最終時点 $T+1$ でのみ発生し、

$$g_{T+1}(s_{T+1}) := \begin{cases} -\exp\{-Rw_{T+1}\}, & \bar{Q}_{T+1} = 0; \\ -\infty, & \bar{Q}_{T+1} \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

と定義する。したがって、本稿では、計画期間内

で、丁度 Q を執行する“堅い制約”を課す場合を扱う。

- マルコフ取引執行戦略 π は 1 ステージの意思決定規則の列

$$\pi := (f_1, \dots, f_t, \dots, f_T) \quad (12)$$

と定義され、その全体を Π_M で表す。また、マルコフ取引執行戦略 $\pi \in \Pi_M$ の時点 $t (= 1, \dots, T)$ 以降の部分取引執行戦略を

$$\pi_t := (f_t, \dots, f_T) \quad (13)$$

で表し、その全体を $\Pi_{M,t}$ で表す。

CARA 型の効用関数をもつ、リスク回避的なラージ・トレーダーの、最終時点 $T+1$ での手持ち資金(富) w_{T+1} からの期待効用を最大にする動的取引執行戦略を求める問題を考える。このラージ・トレーダーのリスク回避係数を R 、取引執行戦略を π とし、 π のもとでの、時点 $t (= 1, \dots, T, T+1)$ 、状態 $s_t \in S$ からの期待効用を

$$V_t^\pi[s_t] = \mathbb{E}_t^\pi [g_{T+1}(s_{T+1}) | s_t] \quad (14)$$

と定義する。ただし、 $\mathbb{E}_t^\pi[\cdot | \cdot]$ は、取引執行戦略を π としたときの、時点 t での条件付き期待値を表す。

さて、問題の最適値関数を、つぎのように定義する。

$$V_t[s_t] = \sup_{\pi \in \Pi_M} V_t^\pi[s_t], \quad s_t \in S; t = 1, \dots, T, T+1. \quad (15)$$

このとき、最適性原理(ベルマン原理、動的計画原理)により、最適性方程式(ベルマン方程式、動的計画方程式)は

$$V_{T+1}(s_{T+1}) = g_{T+1}(s_{T+1}), \quad s_{T+1} \in S; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_t(s_t) &= \sup_{q_t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[V_{t+1}(s_{t+1}) | s_t], \\ &= \sup_{q_t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[V_{t+1}(h_t(s_t, q_t, (v_t, \varepsilon_t))) | s_t], \\ & \quad s_t \in S; t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (17)$$

と表される。これにより、 $V_1(s_1)$ を達成する最適な動的取引執行戦略 π^* は、原理的には、時点 T から始めて、時点 t についてバックワードに、上記の最適性方程式の右辺を最適化する q_t^* を求めて行けば良い(バックワード・インダクション、後退帰納法)。

2.2 最適取引執行戦略の性質

定理 2.1. 時点 $t (= 1, \dots, T)$ におけるラージ・トレーダーの最適執行量 q_t^* は、その時点における、ラージ・トレーダーの残余執行量 \bar{Q}_t 、過去の価格インパク

トの残存効果 r_t の線形関数(アフィン関数)となる。すなわち、問題を規定する諸パラメータに依存する時間 t の確定的関数 $a_t, b_t, c_t, t = 1, \dots, T$ を用いて、

$$q_t^* = a_t + b_t \bar{Q}_t + c_t r_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (18)$$

と表される。($(a_t, b_t, c_t), t = 1, \dots, T$ の満たす再帰式については、紙面の都合上、省略する。)

上記の定理から、各時点 $t (= 1, \dots, T)$ での最適執行量は、その時点における、手持ち資金 w_t 、市場価格 p_t には依存せず、残余執行量 \bar{Q}_t 、過去の価格インパクトの残存効果 r_t を通じてのみ、決定過程の状態に依存する。

もし、ラージ・トレーダー以外のトレーダーたちの価格インパクトがない、あるいは、彼らの総提出注文量が確定的ならば、これら \bar{Q}_t, r_t は予見でき、確定的なコントロールが可能であるから、最適な動的取引執行戦略は、確定的な静的取引執行戦略のクラスの中にあることがわかる。

系 2.1. もしラージ・トレーダー以外のトレーダーたちの価格インパクトがない、すなわち、 $\kappa_t = 0, t = 1, \dots, T$ 、あるいは、彼らの総提出注文量が確定的、すなわち、 $\sigma_{v_t} = 0, t = 1, \dots, T$ ならば、時点 $t (= 1, \dots, T)$ におけるラージ・トレーダーの最適執行量 q_t^* は、時間 t の確定的関数となる。

注 2.2. 最終時点 $T+1$ における執行残を 0 とすることを強く課す、すなわち、 $\bar{Q}_{T+1} = 0$ を堅い制約とする場合を考えたが、 $\bar{Q}_{T+1} \neq 0$ の場合においても、終値 p_{T+1} に加えて付加的な費用を支払って、

$$(p_{T+1} + \chi_{T+1} \bar{Q}_{T+1}) \bar{Q}_{T+1} \quad (19)$$

で購入・売却が可能であるとした“柔らかな制約”のもとでの最適取引執行問題においても、上記の定理、系は成立する。ただし、 χ_{T+1} はある定数である。この場合、最終時点での(効用)ペイオフを

$$\begin{aligned} g_{T+1}[s_{T+1}] \\ := -\exp\{-R[w_{T+1} - (p_{T+1} + \chi_{T+1} \bar{Q}_{T+1}) \bar{Q}_{T+1}]\} \end{aligned} \quad (20)$$

と定義すれば良い。

3. 取引執行ゲーム

続いて、同様の離散時間の価格インパクト・モデルに基づき、CARA 型の効用関数をもつ複数(簡単のため 2 人)のラージ・トレーダーの、購入計画期間における最終時点での手持ち資金(富)からの期待効用を最大化しようとするゲーム・モデル(取引執行ゲーム)を考える。

定められた時点 $T+1$ ($\in \mathbb{Z}_+$) までに、規定量 Q^i ($\in \mathbb{R}$) の単一のリスク資産 (株式など) のすべてを購入しようとする 2 人のラージ・トレーダー $i = 1, 2$ を考える。時点 t ($= 1, \dots, T$) における、ラージ・トレーダー i の提出する購入注文量 (執行量) を q_t^i とし (ただし、購入の時 $q_t^i > 0$, 売却の時 $q_t^i < 0$)、時点 t ($= 1, \dots, T, T+1$) における残余購入量を \bar{Q}_t^i (ただし、 $\bar{Q}_1^i = Q$)、また、手持ち資金 (富) を w_t^i で表す。

リスク資産の時点 t における市場価格 (気配値) を p_t とする。ラージ・トレーダーの提出する購入注文は、大量であるが故にその価格 p_t では執行されず、付加的なコストを伴い、執行価格 \hat{p}_t で執行されるものとする。 v_t を他のトレーダーたちの総提出注文量とし、 λ_t, κ_t (≥ 0) で、それぞれラージ・トレーダーたちと他のトレーダーたちの単位執行量あたりの価格の感応度 (インパクト) を表すものとして、執行価格は線形価格インパクトモデル

$$\hat{p}_t = p_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t), \quad t = 1, \dots, T \quad (21)$$

に従うものとする。ただし、 $q_t := q_t^1 + q_t^2$ とおいた。また、つぎの時点での市場価格 p_{t+1} は、価格の回復率 α_t ($\in [0, 1]$)、回復速度 ρ ($\in [0, \infty)$) を用いて、過去の価格インパクトの残存効果を

$$\begin{aligned} r_{t+1} &:= \sum_{k=1}^t (\lambda_k q_k + \kappa_k v_k) \alpha_k e^{-\rho((t+1)-k)} \\ &= e^{-\rho} \sum_{k=1}^{t-1} (\lambda_k q_k + \kappa_k v_k) \alpha_k e^{-\rho(t-k)} \\ &\quad + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \alpha_t e^{-\rho} \\ &= [r_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \alpha_t] e^{-\rho} \end{aligned} \quad (22)$$

と定義すれば、ファンダメンタル価格 $p_t^f := p_t - r_t$ のダイナミクスは

$$\begin{aligned} p_{t+1}^f &= p_{t+1} - r_{t+1} \\ &= p_t - r_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) (1 - \alpha_t) + \varepsilon_t \\ &= p_t^f + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) (1 - \alpha_t) + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (23)$$

を満たす。したがって、市場価格のダイナミクスは

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t - (1 - e^{-\rho}) r_t \\ &\quad + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \{ \alpha_t e^{-\rho} + (1 - \alpha_t) \} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (24)$$

と表される。ただし、 ε_t は、時点 t から時点 $t+1$ までの公的な情報の更新に伴う確率変数とし、列 $(v_t, t = 1, \dots, T)$, $(\varepsilon_t, t = 1, \dots, T)$ は、それぞれ、独立な確率変数列で、

$$v_t \sim N(\mu_{v_t}, \sigma_{v_t}^2); \quad \varepsilon_t \sim N(\mu_{\varepsilon_t}, \sigma_{\varepsilon_t}^2) \quad (25)$$

と従い、さらに、それらの列は互いに独立であるとする。

ラージ・トレーダー $i = 1, 2$ の残余執行量に関しては、

$$\bar{Q}_{t+1}^i = \bar{Q}_t^i - q_t^i \quad (26)$$

を満たし、また手持ち資金 (富) に関しては、

$$w_{t+1}^i = w_t - \hat{p}_t q_t^i = w_t - \{ p_t + (\lambda_t q_t + \kappa_t v_t) \} q_t^i \quad (27)$$

が成り立つ。

最後に、このモデルにおいては、 $(1 - \alpha_t) \lambda_t$, $\alpha_t \lambda_t$, $\alpha_t \lambda_t e^{-\rho k}$ が、それぞれ、2 人のラージ・トレーダーたちの執行による、恒久的インパクト、一時的インパクト、過渡的インパクトを表している。

3.1 マルコフ・ゲームとしての定式化

CARA 型の効用関数をもつ、リスク回避的な 2 人のラージ・トレーダー $i = 1, 2$ のそれぞれが、最終時点 $T+1$ での手持ち資金 (富) w_{T+1}^i からの期待効用を最大化しようとする問題を考える。ラージ・トレーダー i のリスク回避係数を R^i とする。

価格と残存効果とのペアのダイナミクスのマルコフ性と、ラージ・トレーダーの最終時点での効用のパス独立性により、問題は、下記のとおり、計画期間を $\mathcal{T} := \{1, \dots, T, T+1\}$ とするマルコフ・ゲーム (確率ゲーム) として定式化できる。

- ・プレイヤー: ラージ・トレーダー $i \in \{1, 2\} =: N$.
- ・時点 t ($= 1, \dots, T+1$) での状態: $s_t = ((w_t^1, w_t^2), p_t, (\bar{Q}_t^1, \bar{Q}_t^2), r_t) \in \mathbb{R}^6 =: S$.
- ・時点 t ($= 1, \dots, T$) でのラージ・トレーダーたちの行動の組: $(q_t^1, q_t^2) \in \mathbb{R}^2 =: A^1 \times A^2$.
- ・時点 t での状態 s_t からつぎの時点 $t+1$ での状態 s_{t+1} への状態推移ダイナミクスは前述の式 (22), (24), (26), (27) を纏めて

$$s_{t+1} = h_t (s_t, (q_t^1, q_t^2), (v_t, \varepsilon_t)), \quad t = 1, \dots, T \quad (28)$$

と表される。

- ・ラージ・トレーダー $i = 1, 2$ への (効用) ペイオフは最終時点 $T+1$ でのみ発生し、

$$g_{T+1}^i (s_{T+1}) := \begin{cases} -\exp\{-R^i w_{T+1}^i\}, & \bar{Q}_{T+1}^i = 0; \\ -\infty, & \bar{Q}_{T+1}^i \neq 0 \end{cases} \quad (29)$$

と定義する。したがって、本稿では、計画期間内

で、丁度 Q^i を執行する“堅い制約”を課す場合を扱う。

・ ラージ・トレーダー $i = 1, 2$ のマルコフ取引執行戦略は、各時点 $t (= 1, \dots, T)$ での 1 ステージの (非確率的な) 意思決定規則を表すボレル可測関数

$$f_t^i : s_t \in S = \mathbb{R}^6 \mapsto f_t^i(s_t) \in A^i = \mathbb{R} \quad (30)$$

からなる列

$$\pi^i = (f_1^i, \dots, f_t^i, \dots, f_T^i) \quad (31)$$

と表すことができ、その全体を Π_M^i で表す。また、 $t (= 1, \dots, T)$ に対して、マルコフ取引執行戦略 $\pi^i = (f_1^i, \dots, f_t^i, \dots, f_T^i)$ の t 以降の部分取引執行戦略を

$$\pi_t^i = (f_t^i, \dots, f_T^i) \quad (32)$$

と表し、その全体を $\Pi_{M,t}^i$ で表す。

さて、ラージ・トレーダー $i = 1, 2$ の目的は、初期状態 $s_1 (\in S)$ を所与として、(総) 期待 (効用) ペイオフ

$$V^i(\pi^1, \pi^2)[s_1] := \mathbb{E}_1^{\pi^1, \pi^2}[g_{T+1}^i(s_{T+1})|s_1] \quad (33)$$

を最大化することであるが、時点 $t (= 1, \dots, T)$, 状態 $s_t \in \mathbb{R}^6$ から始まる部分マルコフ・ゲームに対して、

$$V_t^i(\pi_t^1, \pi_t^2)[s_t] := \mathbb{E}_t^{\pi_t^1, \pi_t^2}[g_{T+1}^i(s_{T+1})|s_t] \quad (34)$$

と定義する。ただし、 $\mathbb{E}_t^{\pi_t^1, \pi_t^2}[\cdot | \cdot]$ は、マルコフ取引執行戦略の組を (π_t^1, π_t^2) としたときの時点 t での条件付き期待値を表す。

3.2 マルコフ完全均衡の存在と性質

基本的な解概念 (均衡概念) は、もちろん、つぎのナッシュ均衡である。

定義 3.1 (ナッシュ均衡). マルコフ取引執行戦略の組 $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi_M^1 \times \Pi_M^2$ がナッシュ均衡であるとは、

$$V^1(\pi^1, \pi^2)[s_1] \geq V^1(\pi^1, \pi^2)[s_1], \forall \pi^1 \in \Pi_M^1; \quad (35)$$

$$V^2(\pi^1, \pi^2)[s_1] \geq V^2(\pi^1, \pi^2)[s_1], \forall \pi^2 \in \Pi_M^2 \quad (36)$$

が成り立つときを言う。

さらに、マルコフ・ゲームにおいて、ナッシュ均衡を精緻化した解概念がつぎのマルコフ完全均衡である。これは、任意の時点 $t (= 1, \dots, T)$, 任意の状態 $s_t \in \mathbb{R}^6$ から始まる任意の部分マルコフ・ゲームに対して、部

分取引戦略の組 (π_t^1, π_t^2) がナッシュ均衡を構成することを要求していて、展開形ゲームでの部分ゲーム完全均衡に対応している。

定義 3.2 (マルコフ完全均衡). マルコフ取引執行戦略の組 $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi_M^1 \times \Pi_M^2$ がマルコフ完全均衡であるとは、以下が成り立つときを言う。任意の時点 $t (= 1, \dots, T)$ と任意の状態 $s_t \in S = \mathbb{R}^6$ に対して、

$$V_t^1(\pi_t^1, \pi_t^2)[s_t] \geq V_t^1(\pi_t^1, \pi_t^2)[s_t], \forall \pi_t^1 \in \Pi_{M,t}^1; \quad (37)$$

$$V_t^2(\pi_t^1, \pi_t^2)[s_t] \geq V_t^2(\pi_t^1, \pi_t^2)[s_t], \forall \pi_t^2 \in \Pi_{M,t}^2 \quad (38)$$

が成り立つときを言う。

マルコフ・ゲームにおける最適性原理 (ベルマン原理, 動的計画原理) とも位置付けられる、つぎの 1 ステージ逸脱原理から、時間についてのバックワード・インダクションによりマルコフ完全均衡を導くことができる。

補題 3.1 (1 ステージ逸脱原理). マルコフ取引執行戦略の組 $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi_M^1 \times \Pi_M^2$ がマルコフ完全均衡であるための必要十分条件は、任意の時点 $t (= 1, \dots, T)$ と任意の状態 $s_t \in S = \mathbb{R}^6$ に対して、

$$V_t^1(\pi_t^1, \pi_t^2)[s_t] = \sup_{q_t^1 \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [V_{t+1}^1(\pi_{t+1}^1, \pi_{t+1}^2)[h_t(s_t, (q_t^1, f_t^{2*}(s_t)), (v_t, \varepsilon_t))]] | s_t] \quad (39)$$

$$= \mathbb{E} [V_{t+1}^1(\pi_{t+1}^1, \pi_{t+1}^2)[h_t(s_t, (f_t^{1*}(s_t), f_t^{2*}(s_t)), (v_t, \varepsilon_t))]] | s_t]; \quad (40)$$

$$V_t^2(\pi_t^1, \pi_t^2)[s_t] = \sup_{q_t^2 \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [V_{t+1}^2(\pi_{t+1}^1, \pi_{t+1}^2)[h_t(s_t, (f_t^{1*}(s_t), q_t^2), (v_t, \varepsilon_t))]] | s_t] \quad (40)$$

$$= \mathbb{E} [V_{t+1}^2(\pi_{t+1}^1, \pi_{t+1}^2)[h_t(s_t, (f_t^{1*}(s_t), f_t^{2*}(s_t)), (v_t, \varepsilon_t))]] | s_t]$$

が成り立つことである。

バックワード・インダクションにより、つぎの主要定理を示すことができる。

定理 3.1. 以下の (P1), (P2) の様に特徴付けられるマルコフ完全均衡 $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi_M^1 \times \Pi_M^2$ が存在する : 各時点 $t (= 1, \dots, T)$ において、

(P1) 各ラージ・トレーダー $i = 1, 2$ の均衡執行量 q_t^{i*} は、その時点 t での状態 $s_t = ((w_t^1, w_t^2), p_t, (\overline{Q}_t^1, \overline{Q}_t^2), r_t)$ の (うちの) $((\overline{Q}_t^1, \overline{Q}_t^2), r_t)$ (のみ) の線形関数 (アフィン関数) となる。

$$q_t^{i*} = f_t^{i*}(s_t) = a_t^i + b_t^i \overline{Q}_t^1 + c_t^i \overline{Q}_t^2 + d_t^i r_t; \quad (41)$$

(P2) 均衡 (π^1, π^2) において、時点 t , 状態 s_t から始まる部分ゲームでの各ラージ・トレーダー $i = 1, 2$ の期待均衡 (効用) ペイオフは下記の関数形をもつ。

$$\begin{aligned}
V_t^i(\pi_t^i, \pi_t^j)[s_t] = & -\exp\{-R^i(w_t^i - p_t \bar{Q}_t^i) \\
& - G_t^i(\bar{Q}_t^i)^2 - H_t^i \bar{Q}_t^i + I_t^i r_t \bar{Q}_t^i + J_t^i r_t^2 + L_t^i r_t \\
& + M_t^i(\bar{Q}_t^i)^2 + N_t^i \bar{Q}_t^i + X_t^i r_t \bar{Q}_t^i + Y_t^i \bar{Q}_t^i \bar{Q}_t^j + Z_t^i\}.
\end{aligned}
\tag{42}$$

ただし、 $i = 1, 2$ に対し、

$$a_t^i, b_t^i, c_t^i, d_t^i; G_t^i, H_t^i, I_t^i, J_t^i, L_t^i, M_t^i, N_t^i, X_t^i, Y_t^i, Z_t^i$$

は問題を規定する諸パラメータに依存する時間 t の確定的関数である。(それらが満たす再帰式については、紙面の都合上省略するが、時間について、バックワード ($t = T, T-1, \dots, 1$ の順) に求めることができる。)

もし、2人のラージ・トレーダー以外のトレーダーたちの価格インパクトがない、あるいは、彼らの総提出注文量が確定的ならば、 $(\bar{Q}_t^1, \bar{Q}_t^2)$, r_t は予見可能であるから、上記定理 3.1 のマルコフ完全均衡取引執行戦略は、静的取引執行戦略のクラスの中にあることがわかる。
系 3.1. もし、2人ラージ・トレーダー以外のトレーダーたちの価格インパクトがない、すなわち、 $\kappa_t = 0$, $t = 1, \dots, T$, あるいは、彼らの総提出注文量が確定的、すなわち、 $\sigma_{v_t} = 0$ ならば、上記定理 3.1 のマルコフ完全均衡取引執行戦略において、時点 $t (= 1, \dots, T)$ におけるラージ・トレーダーたち $i = 1, 2$ の均衡執行量 q_t^{i*} は、時間 t の確定的関数となる。

4. 数値計算例

4.1 非対称なラージ・トレーダーの存在

本節では、取引執行ゲームにおいて、2人のラージ・トレーダーの所定の執行計画量 Q^i , $i = 1, 2$ が異なる場合の均衡取引執行戦略について、数値計算例を通して比較静学を行う。

以下では、各パラメータを以下のように設定する。

$$\begin{aligned}
\mu_{v_t} &\equiv 0, \sigma_{v_t} \equiv 0; \mu_{\varepsilon_t} \equiv 0, \sigma_{\varepsilon_t} \equiv 0.02; \\
\alpha_t &\equiv 0.5; \lambda_t \equiv 0.001, \kappa_t \equiv 0; \\
\rho &= 0.1; R^i = 0.001, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{43}$$

4.1.1 他方の初期執行計画量 Q^i の影響

はじめに、一方のラージ・トレーダー j の初期の執行計画量 $Q^j = 100,000$ を固定して、他方のラージ・トレーダー i の執行計画量が $Q^i = 100,000$, $Q^i = 50,000$, $Q^i = 0$ の場合のそれぞれについての数値計算結果を示す。

図 2, 3 は、 $Q^i = 0, Q^i = 50,000$ の場合、ラージ・トレーダー i の均衡取引執行戦略には、ラウンド・トリップ取引 (購入のフェーズの後の売却のフェーズ) が

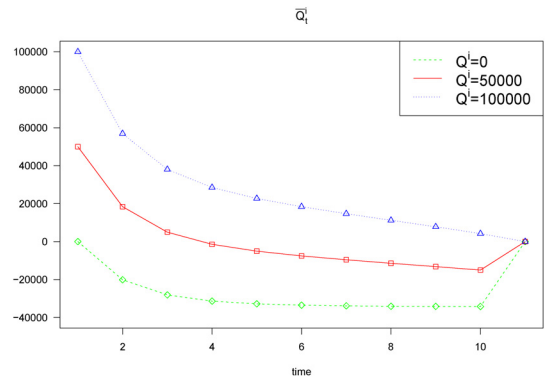


図 2 各時点における残余執行量 \bar{Q}_t^i , $t = 1, \dots, T$

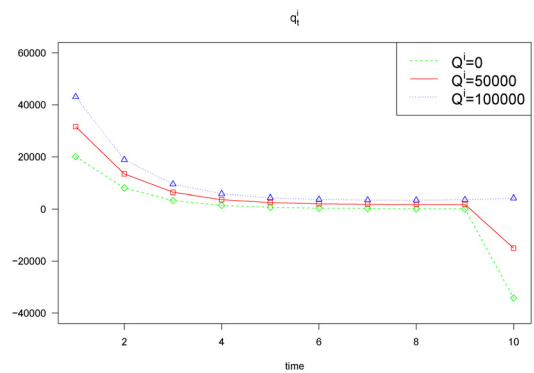


図 3 各時点における執行量 q_t^i , $t = 1, \dots, T$

含まれることを示している。

4.1.2 逆の執行計画量をもつラージ・トレーダーが居る場合の取引執行ゲーム

つぎに、一方のラージ・トレーダー j の購入計画量と他方のラージ・トレーダー i の売却計画量とが等しい ($Q^j = -Q^i = -100,000$) 場合の数値計算結果を示す。

図 4, 5 が示すように、購入・売却の逆の売買執行計画をもつ 2人のラージ・トレーダーたちは最終時点の直前まで執行を行わず、最終時点 T においてのみ執行残を売買する。彼らは初期時点において同時にすべての執行計画量を執行することで互いの価格インパクトを相殺し合うことができる。しかし、相手の売買取引の後に執行を行うことで、状況をより改善することができることから、彼らは慎重に取引を行うインセンティブがあることがわかる。

4.2 最適取引執行問題と取引執行ゲームの比較

最後に、2節の 1人のラージ・トレーダーの最適取引執行問題 (最適化モデル) での最適取引執行戦略と 3節の 2人のラージ・トレーダーによる取引執行ゲー

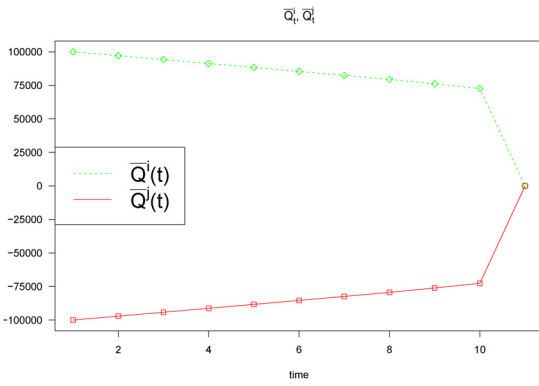


図 4 各時点における残余執行量 $\bar{Q}_t^i, t = 1, \dots, T$

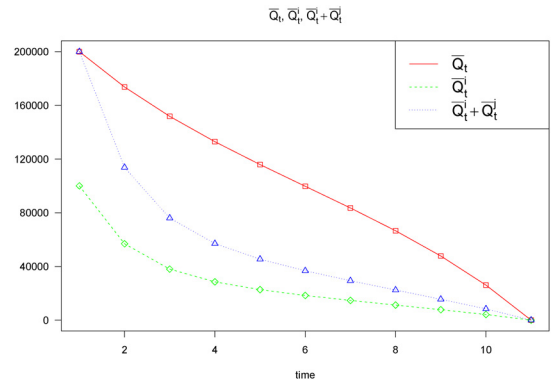


図 6 各時点における残余執行量 $\bar{Q}_t^i, t = 1, \dots, T$

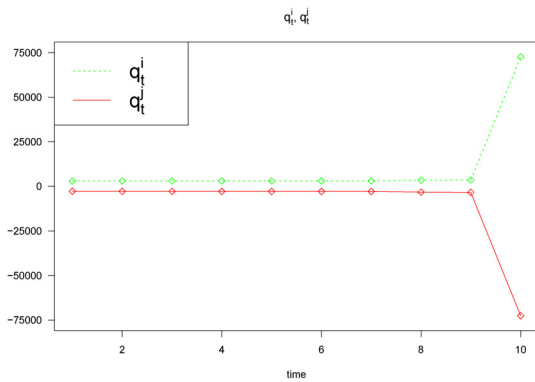


図 5 各時点における執行量 $q_t^i, t = 1, \dots, T$

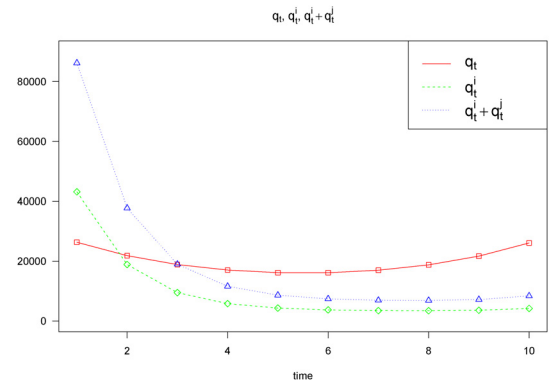


図 7 各時点における執行量 $q_t^i, t = 1, \dots, T$

ム（ゲーム・モデル）での均衡取引執行戦略との比較を行う。同一の購入計画期間において、後者の 2 人のラージ・トレーダーによるゲーム・モデルでは、初期時点において同じ量 $Q^i = Q^j = 100,000$ の購入を計画し、一方、前者の 1 人ラージ・トレーダーの最適化モデルではそれらの合計の量 $Q = 200,000$ の購入を計画していると仮定する。

図 6, 7 からは、両モデルにおける各々のラージ・トレーダーの執行量は、一見すると各時点 $t = 1, \dots, T$ においてあまり差がないように見える。しかしながら、各々のモデルにおけるラージ・トレーダーの初期時点における購入計画量は 2 倍の差があることを考慮すると、後者のゲーム・モデルにおけるラージ・トレーダーの執行速度は、前者の最適化モデルのそれに比べ、約 2 倍の速さで取引を執行していると言える。それは、後者のゲーム・モデルでは他方のラージ・トレーダーの執行による価格インパクトを考慮することから、相手よりも早く執行をするインセンティブが生じるため、早く売買取引を執行しようとするものと考

えられる。

5. おわりに

本稿で扱った最適取引執行問題、取引執行ゲームはいずれも離散時間モデルであったが、連続時間版のモデルを確率制御問題、確率インパルス制御問題、あるいは確率微分ゲームに定式化し、分析することは、大きな課題として残されている。

また、単一のリスク資産の取引執行を考えたが、複数のリスク資産の同時並行的取引執行の問題も将来の課題である。その際、それら複数の資産の市場価格への適切なクロス・インパクト・モデルを準備しなければならない。

さらに、価格インパクトのうち、永久に残るものと時間の経過とともに消え去るものとを識別・観測可能である、との前提のもとでモデル化し、分析しているが、不完全にしか識別・観測できないとした、より現実的な問題も重要であろう。

謝辞 筆者の大西, 下清水は, それぞれ学術振興会
科学研究費補助金 17K01255, 19J10501 による財政的
支援を受けた.

参考文献

- [1] D. Bertsimas and A. W. Lo, “Optimal control of execution costs,” *Journal of Financial Markets*, **1**, pp. 1–50, 1998.
- [2] R. Almgren and N. Chriss, “Optimal execution of portfolio transactions,” *Journal of Risk*, **3**, pp. 5–39, 2000.
- [3] A. Cartea, S. Jaimungal and J. Penalva: *Algorithmic and High-Frequency Trading*, Cambridge University Press, 2015.
- [4] M. Ohnishi and M. Shimoshimizu, “Optimal and equilibrium execution strategy with generalized price impacts,” SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3323335>, 2019, to appear in *Quantitative Finance*.
- [5] S. Kuno and M. Ohnishi, “Optimal execution strategy with price impact,” *Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS) Kokyuroku*, **1675**, pp. 234–247, 2010.
- [6] S. Kuno and M. Ohnishi, “Optimal execution in illiquid market with the absence of price manipulation,” *Journal of Mathematical Finance*, **5**, pp. 1–14, 2015.
- [7] S. Kuno, M. Ohnishi and P. Shimizu, “Optimal execution with off-exchange trading,” *Journal of Mathematical Finance*, **7**, pp. 54–64, 2017.
- [8] S. Kuno, M. Ohnishi and M. Shimoshimizu, “Optimal execution strategies with generalized price impact models,” *Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS) Kokyuroku*, **2078**, pp. 77–83, 2017.
- [9] X. Luo and A. Schied, “Nash equilibrium for risk-averse investors in a market impact game with transient price impact,” *arXiv:1807.03813v1 [q-fin.TR] 10 Jul 2018*.
- [10] O. Guéant: *The Financial Mathematics of Market Liquidity*. CRC Press, 2016.
- [11] A. Schied and T. Zhang, “A market impact game under transient price impact,” *Mathematics of Operations Research*, **44**, pp. 102–121, 2019.