ファジィ数理計画法の現状と課題

広島大学　乾口雅弘　INUIGUCHI Masahiro

1．はじめに

1980年代後半のファジィブームを契機として，ファジィ理論の考え方がさまざまな分野に積極的に導入されるようになった．ＯＲ関連分野においても，意思決定論や数理計画法，データ解析や品質管理など，多岐に渡ってファジィ理論の導入が検討されている．

数理計画法へのファジィ理論の応用は古く，Zadehのファジィ集合に関する論文 "Fuzzy Sets" が国際雑誌に公表された年と同じ，1965年の Zadeh のシンポジウムでの講演 [1] にさかのぼることができる．このときのファジィ最適化の提案は，従来のペナルティ法と大差ないが，既に「だいたい〜以下」などのソフトな制約概念が提示されていた．国際雑誌でのファジィ数理計画法の登場は，1970年の有名な Bellman と Zadeh の論文 [2] が最初で，ファジィ意思決定法の考え方が与えられるとともに，ファジィ動的計画法が提案された．また，ファジィ線形計画法は，日本国内では，1973年，国際雑誌では，1974年に田中ら [3,4] によって提案された．さらに，ファジィ係数をもつ数理計画問題は，1976年に Negoita ら [5] によって取り扱われている．

1965年をファジィ数理計画法の胎動期の始点（胎動原点），1970年を黎明期の始点（黎明原点），1976年を発展期の始点（発展原点）とすると，本年（1995年）は，胎動原点から30周年，黎明原点から25周年，発展原点から約20周年ということになり，ファジィ数理計画法に対する研究へもかなりの年月が費やされていることがわかる．したがって，今となっては，一朝一夕にファジィ数理計画法のすべてを語れないことが理解できよう．ファジィブーム以前は，ファジィ理論が不要なもの，役に立たないもの，数学的基盤がないものと批判にさらされていたこともあって，一部の研究者により，細々と地道なファジィ数理計画法の研究が続けられてきた．しかし，ファジィブームも過ぎ去った現在,「ファジィ理論＝不要なもの」,「ファジィ理論＝役に立たないもの」のレッテルがはがされ（「ファジィ理論＝数学的基盤のないもの」のレッテルは未だ健在），ファジィ数理計画法に関しても，より多くの研究が見受けられるようになり，普及期に入ったと考えることができる．

本稿では，ファジィ線形計画法を中心に，

1. ファジィ数理計画法の概観
2. ファジィ数理計画法の利点と欠点
3. 最適性の観点からの取り扱い
4. 可能性理論による取り扱いの妥当性
5. ファジィ数理計画法の課題

について，著者の見解を述べたいと思う．なお，紙数の都合上，ファジィ数理計画法について詳しく解説することができない．興味がある読者は文献 [6-10] を御覧頂きたい．

2．ファジィ数理計画法の概観

2.1 ファジィ数理計画法の種類

次の計画問題を考えよう．

[問題 1]　ある工場では，2種類の製品 P, Q を生産している．製品 P を1トン生産すると，<u>だいたい3万円</u>の変動費がかかり，製品 Q を1トン生産すると，<u>だいたい4万円</u>の変動費が必要になる．1日当たり，<u>だいたい250万円ぐらいまで</u>変動費として調達できる．一方，製品 P, Q の1トン当たりの粗利益は，それぞれ，<u>だいたい5万円</u>，<u>だいたい6万円</u>である．このとき，粗利益を最大にするには，1日に製品 P, Q を何トンずつ生産すればよいだろうか？

上の問題の下線部にあいまいさが含まれている．このようなあいまいさを厳密に分類すると,「不明確さ (ambiguity)」と「漠然性 (vagueness)」の二つがある．問題1における「だいたい3万円」や「だいたい5万円」などは，真の値はただ一つであるが，正確な値がわからないあいまいさを表している．このように，真の値が明確にわかっていないあいまいさは，不明確さと呼ばれる．一方,「だいたい250万円ぐらいまで」は，厳密に「250万円まで」というはっきりとした境界を緩め，250万円より大きくとも250万円付近であればよいというように境界をぼやかしたものを示している．このような境界のあいまいさ，つまり，意味的なあいまいさは，漠然性と呼ばれる．一般に，不明確さは尤もらしさを示す分布（確率分布や可能性分布など）で表現されるのに対し，漠然性は帰属度ついた集合（ファジィ集合やトール集合など）で表現される．

ファジィ数理計画法では，不明確さ（係数値のあいまいさ）と漠然性（制約のあいまいさ，目標のあいまいさ，左辺と右辺の関係のあいまいさ）とが取り扱われている．取り扱うあいまいさの種類により，ファジィ数理計画法は次の三つに分類できる．

1. 漠然性のみを扱うファジィ数理計画法
2. 不明確さのみを扱うファジィ数理計画法
3. 不明確さと漠然性を同時に扱えるファジィ数理計画法

確率計画法は分布問題，二段問題，機会制約条件計画法に分類されるが，ファジィ数理計画法は，ほとんどが機会制約条件計画法に対応する様相制約条件計画法と解釈できる [11]．近年，ようやく分布問題に対応するもの [10,12] が研究され始めたが，二段問題については，ほとんどなされていない（様相性目標計画法 [11] を拡張すれば，二段問題も取り扱える）．機会制約条件計画法が，目的関数の有無や扱い方により，機会制約条件モデル，確率最大化モデル，満足水準最大化モデルなどに分類できるように，様相制約条件計画法も，様相制約条件モデル，様相性最適化モデル，満足水準最適化モデルに分類できる．文献 [6] では，あいまいさの種類やモデルに基づく分類がなされるとともに，一般的なファジィ数理計画問題の取り扱い方が議論されている．

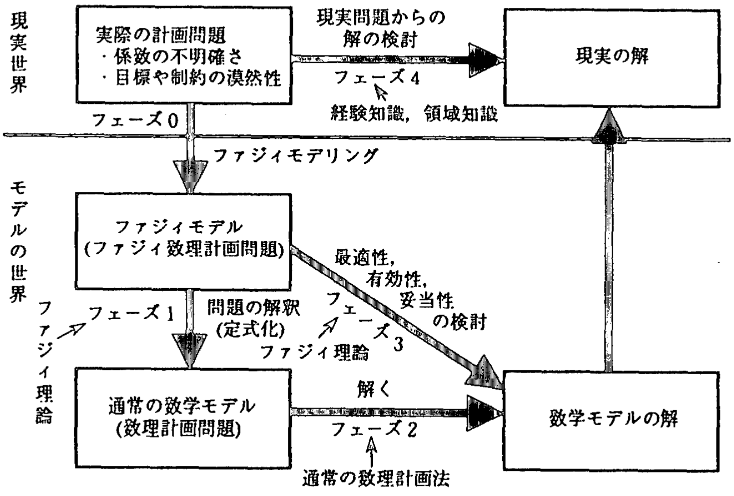

図1．ファジィ数理計画アプローチ

2.2 ファジィ数理計画アプローチ

ファジィ数理計画法におけるアプローチを図示すると，図1のようになる．フェーズ0では，まず，問題1のように記述される係数の不明確さや制約や目標の漠然性を含んだ計画問題を，ファジィ集合を用いたモデル（ファジィモデル，ファジィ数理計画問題）で表現する．たとえば,「だいたい a」に対応するファジィ集合 $\tilde{a}$ は，$\alpha,\beta>0$ を用いて，

$$\mu_{\tilde{a}}(r)=\begin{cases}0; & r<a-\alpha\\ (\alpha+r-a)/\alpha; & a-\alpha\le r<a\\ (\beta+a-r)/\beta; & a\le r\le a+\beta\\ 0: & r>a+\beta\end{cases}\tag{1}$$

なるメンバシップ関数をもつ三角型ファジィ数で表現でき,「だいたい b 以下」というファジィ集合 $\lesssim b$ は，$\gamma>0$ を用いて，

$$\mu_{\lesssim b}(r)=\begin{cases}1; & r\le b\\ (\gamma+b-r)/\gamma; & b<r\le b+\gamma\\ 0: & r>b+\gamma\end{cases}\tag{2}$$

なるメンバシップ関数をもつ線形のファジィ制約で表現できる．問題1のあいまいさを含む言葉をすべて，ファジィ集合で表現すると，問題1は次のファジィ数理計画問題として定式化される．

$$\begin{array}{rl}\text{maximize} & \tilde{5}x_1+\tilde{6}x_2\\ \text{sub. to} & \tilde{3}x_1+\tilde{4}\lesssim 250\\ & x_1,\ x_2\ge 0\end{array}\tag{3}$$

ただし，x_1，x_2 は，それぞれ，製品 P，Q の生産量である．

得られたファジィ数理計画問題は,「だいたい a ぐらい」や「だいたい b 以下」を表すファジィ集合を含んでいるため，問題が明確に記述されていない．たとえば，(3) 式の制約条件は,「だいたい $3x_1+4x_2$」が「だいたい 250 以下」ということを表し，x_1, x_2 についてどうなれば良いのかを明瞭に表していない．そこで，問題を明瞭にするため，解釈を導入する．この解釈を通して，ファジィ数理計画問題が明瞭に記述された通常の数理計画問題（数学モデル）へ変換される．これがフェーズ1である．一般に，解釈は無数に存在する．

たとえば，(3) 式の $\tilde{3}$, $\tilde{6}$ が $\alpha=\beta=1$ として，$\tilde{4}$, $\tilde{5}$ が $\alpha=\beta=2$ として，(1) 式で定められているとし，$\lesssim 250$ が$\gamma=50$ として (2) 式で定められているとしよう．このとき，(3) 式の目的関数値が「z 以上」（z は変数）となり，ファジィ制約を満たすと確信する度合（必然性測度）が 0.7 以上で，z を最大化する問題（満足水準最適化モデル）と解釈すると，問題1は，次の計画問題に帰着することが知られている [6]．

$$\begin{array}{rl}\text{maximize} & 3.6x_1+5.3x_2\\ \text{sub. to} & 3.7x_1+5.4x_2\le 265\\ & x_1,\ x_2\ge 0\end{array}\tag{4}$$

その他の解釈としては，満足水準最適化モデルと双対な様相性最適化モデルがある．様相性最適化モデルでは，たとえば，目的関数値に「300 以上」という目標（ファジィ目標にすることも可能）を与え，目的関数値が 300 以上であり，ファジィ制約を満たすと確信する度合（必然性測度）を最大化する問題として解釈する．この場合，次の計画問題に帰着されることが知られている [6]．

$$\begin{array}{rl}\text{maximize} & h\\ \text{sub. to} & (5-2h)x_1+(6-h)x_2\ge 300\\ & (3+h)x_1+(4+2h)x_2\le 300-50h\\ & x_1,\ x_2\ge 0\end{array}\tag{5}$$

上述のように解釈により得られた通常の計画問題を解くことが，フェーズ2になる．この段階では，通常

の最適化手法を適用することもできる．問題の構造に応じた解法を探求するのが研究課題となる．

たとえば，(4) 式は非負条件を除く制約式が 1 本の線形計画問題であるので，容易に，$(x_1, x_2) = (0, 49\frac{2}{27})$ なる解が得られる．このとき，$z = 260\frac{5}{54}$ となり，この解は$\tilde{3}, \tilde{4}$に対するメンバシップ値が 0.3 以上のどのような係数ベクトルが実現しようとも制約条件の左辺の値（必要な原料）が 265 以下になること，および，$\tilde{5}, \tilde{6}$ に対するメンバシップ値が 0.3 以上のどのような係数ベクトルが実現しようとも目的関数値（粗利益）が $260\frac{5}{54}$ 以上であることを保証している．一方，(5) 式は非線形計画問題であるが，二分法とシンプレックス法を用いて解けることが知られている [8]．特に (5) 式の場合，x_1 か x_2 のいずれかのみが値をもつ解の中に最適解があるので，解析的に解，$(x_1, x_2, h) = (\frac{3900+300\sqrt{433}}{109}, 0, \frac{23-\sqrt{433}}{4})$ を求めることができる．$\tilde{3}, \tilde{4}$に対するメンバシップ値が $\frac{\sqrt{433}-19}{4}$ 以上のどのような係数ベクトルが実現しようとも制約条件の左辺の値（必要な原料）が $\frac{25+25\sqrt{433}}{2}$ 以下になること，および，$\tilde{5}, \tilde{6}$ に対するメンバシップ値が $\frac{\sqrt{433}-19}{4}$ 以上のどのような係数ベクトルが実現しようとも目的関数値（粗利益）が 300 以上であることを保証している．

フェーズ 2 で得られた解は，解釈に基づき変換された通常の計画問題の最適解となるが，この解がもとのファジィ数理計画問題から見て合理的な解になっているか，導入した解釈と異なった観点から見てどうか，意思決定者が意図した解が得られているか などを確認することになる．これが，フェーズ 3 である．フェーズ 3 では，得られた解を図示したり，他の解釈による解との比較，ファジィ数理計画問題における最適性の観点からの検討 [12] などが行われる．検討結果，望ましい解が得られていなければ，問題の解釈を再検討し，新たな解釈を導入し，フェーズ 1，2，3 の手続きを望ましい解が得られるまで繰り返すことになる．

フェーズ 3 と並行して，現実問題に適用するという観点から得られた解を評価することも重要である．往々にして，実際に決定するときに考慮している制約や評価基準が，ファジィ数理計画問題（ファジィモデル）に反映していなかったり，数式を用いて表現できないことがあり，このような場合には，元になっているファジィ数理計画問題をモデル化し直す必要がある．これが，フェーズ 4 である．

3．ファジィ数理計画法の利点と欠点

3.1 通常の数理計画法に対する利点と欠点

一般に，ファジィ数理計画問題を解くことは，あいまいさを無視した数理計画問題を解くことに比べて困難であり（満足水準最適化モデルでは，(4) 式のように，それほど困難にならない），より多くの計算時間を要する．このことより，取り扱い易さや計算時間を犠牲にしてまで，あいまいさを考慮する必要があるのか という疑問が生じるかも知れない．これに対する答えは，あいまいさの影響度，問題の重要性，および，意思決定者の態度に依存するとしかいえない．

あいまいさの影響度については，通常の数理計画問題に対して，感度解析や最適化の事後解析（Post-optimality Analysis）などが提案されており，一つのパラメータに対する最適解付近でのパラメータ変動に対する影響度が算出できる．感度解析や事後解析の結果，パラメータ変動に対して影響が少なければ，得られている最適解を選択すれば良い．しかし，パラメータ変動の影響が大きい場合には，どのような解を選ぶべきかという指針は与えられず，問題の分析者や意思決定者に委ねられている．すなわち，感度解析や事後解析は，解析のための手法であり，決定のための手法ではない．これに対し，ファジィ数理計画法では，あいまいさのもとでの決定手法を与えている．

また，ファジィ係数を含む制約が満たされないことにより重大な問題が生じる場合には，係数の不明確さを考慮する必要がある．不明確なパラメータが構造物の強度に関する制約や，原子力発電所の安全性に関する制約などに含まれる場合には，係数の不明確さを考慮して，安全になるよに（必然性測度を用いて）制約を扱う必要がある．一方,「だいたい 100 万円以上」という漠然とした制約や,「200 万円以上の利益を得る可能性があって欲しい」,「だいたい 100 万円の利益は得なければならない」など，意思決定者のあいまいな制約やあいまいな目標，および，不確実性に対する微妙な要求を解に反映するためには，制約や目標の漠然性や係数の不明確さを考慮しなければならない．

通常の数理計画法に対するファジィ数理計画法の利点は，ファジィ制約やファジィ目標のように制約や目標の柔軟性・ソフト性，および，可能性測度や必然性測度を用いることによる可能性追求やロバスト性に関する要求を取り扱える点にある．すなわち，問題に意思決定者の好みを反映できることにある [13]．

このような意思決定者の嗜好の反映が，問題 1 の解にどのような影響を与えるかを見てみよう．問題 1 における漠然性，不明確さを無視して，線形計画問題として定式化すると，

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & 5x_1 + 6x_2 \\ \text{sub. to} & 3x_1 + 4x_2 \leq 250 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array} \tag{6}$$

となる．この問題を解くと，$(x_1, x_2) = (83\frac{1}{3}, 0)$ なる最

適解が得られる．このときの目的関数値は，$z = 416\frac{2}{3}$ となる．(4) 式の解と比較すると，正の値をとる変数が全く異なっていることがわかる．この解では，目的関数値は非常に大きいが，「だいたい 250 万円ぐらいまで」という調達可能資金を考えると，せいぜい 300 万円までしか調達できないにもかかわらず，$\tilde{3}$, $\tilde{4}$ に対するメンバシップ値が $\frac{174}{249}$ 以上の係数ベクトルに対してしか，300 万円以下にならない．制約違反の可能性が高いことから，危険な解となっている．

3.2 確率計画法に対する利点と欠点

ファジィ数理計画法に極めて類似したものに確率計画法がある．確率計画法では，不明確な係数が確率分布により取り扱われているのに対し，ファジィ数理計画法では，可能性分布により取り扱われている．ファジィ数理計画法と確率計画法の類似性，等価性については，文献 [14] に述べられている．文献 [14] には，ファジィ数理計画法と確率計画法の利点・欠点についても掲げられている．主な点をまとめると，次の 2 点である．

1. 確率計画法では係数の従属性が取り扱えるのに対し，ファジィ数理計画法では係数の従属性を考慮した手法が未だあまりない．
2. 確率計画法では，期待値最大化モデル，分散最小化モデルなどを除き，一般の形状の確率分布に従う係数ベクトルをもつ問題を解くことは困難である．一方，ファジィ数理計画法では，任意の形状のファジィ集合を取り扱うことができる．

問題 1 のあいまいな係数を先のファジィ数の広がり $\alpha = \beta$ の $\frac{1}{2}$ を標準偏差，中心を平均とした正規分布（それぞれ，互いに独立と仮定する）とし，「だいたい 250 万円ぐらいまで」というファジィ目標を単に「250 万円以下」として，確率計画法の分散最小化モデルを適用しよう．分散最小化モデルでは，目的関数値の分散を最小化するため，目的関数値の最大化に関連する基準は導入されない．目的関数値の期待値が 150 以上という制約を加えよう．また，資金の制約の左辺が確率分布になるので，「250 万円以下」である確率が 0.8 以上であれば良いとしよう．このとき，分散最小化モデルは次の計画問題に帰着する．

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & {x_1}^2 + 0.25{x_2}^2 \\
\text{sub. to} & 5x_1 + 6x_2 \geq 150 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 0.84\sqrt{0.25{x_1}^2 + {x_2}^2} \leq 250 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0
\end{array}
\tag{7}
$$

この問題を解くと，$(x_1, x_2) = (\frac{120}{13}, \frac{225}{13})$ が得られる．ファジィ数理計画法や通常の線形計画法による解と著しく異なるのは，変数 x_1 も変数 x_2 も同時に正の値を取ることである．このように，確率計画法を適用すると，一般に非線形計画問題になり，より多くの変数へ資金が分割される．ポートフォリオ選択問題において議論されているように，同じ確率分布に従う利得をもつ独立な二つの代替案へ投資する際は，半分ずつ投資してリスクを少なくする分割投資が最適となる．2 章で述べたタイプのファジィ数理計画法では，分割投資だけが最適とはならず，安全な解が得られるとは限らない．

4．最適性の観点からの取り扱い

ファジィ数理計画法の特徴であるソフト性，ロバスト性などは，実行可能性ばかりではなく，最適性にも導入されている．2 章で述べた満足水準最適化モデルや様相性最適化モデルでの目的関数の取り扱いは，最適性の概念を直接拡張したものではない．最適性の概念を直接拡張した可能的最適解や必然的最適解が提案されている [12]．必然的最適解は，目的関数の係数ベクトルが中心付近で変動しても最適性を保証しており，最適性の概念にロバスト性が導入されている．最近，必然的最適性の概念にソフト性を加えたロバストな最適解として，ファジィ必然的最適解が提案されている [15]．

ファジィ必然的最適解集合 $\Box Opt$ は，目的関数の係数ベクトルが中心付近で変動しても最適値からの差がそれほど大きくない解のファジィ集合で，通常の制約集合 X のもとでは，次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
\mu_{\Box Opt}(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{c}} \max\{&(1 - \mu_{\Gamma}(\boldsymbol{c})), \\
&\inf_{\boldsymbol{y} \in X} \min(\mu_{Dif}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}), \chi_X(\boldsymbol{x}))\}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ここで，Γ は目的関数の係数ベクトルのファジィ集合（可能性分布）であり，Dif は差がそれほど大きくないことを示すファジィ集合である．ファジィ必然的最適解集合に基づけば，最も合理的な解は，$\mu_{\Box Opt}(\boldsymbol{x})$ を最大にする解となる．

問題 1 にファジィ必然的最適解の考え方を適用しよう．制約条件は，満足水準最適化モデルと同様に扱おう．ファジィ集合 Dif を次のように定義する．

$$
\mu_{Dif}(r) = \begin{cases} 1; & r \leq 0 \\ \dfrac{100 - r}{100}; & 0 < r \leq 100 \\ 0; & r > 100 \end{cases}
\tag{9}
$$

このとき，最良ファジィ必然的最適解は次の問題を解

くことにより求められる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & h & \\
\text{sub. to} & (185+74h)x_1+(222-37h)x_2 & \\
 & \qquad\qquad \ge 9550+9000h & \\
 & (270-108h)x_1+(320+54h)x_2 & (10)\\
 & \qquad\qquad \ge 10500+8050h & \\
 & 3.7x_1+5.4x_2 \le 265 & \\
 & x_1,\ x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

この問題は二分法とシンプレックス法により解くことができ，解$(x_1, x_2, h) = (55.425, 11.0977, 0.596577)$が得られる．この解では，$x_1$，$x_2$とも正の値を取り，資金が分割されていることがわかる．さらに，同じファジィ集合（可能性分布）に制限される利得をもつ独立な二つの代替案へ投資する際は，半分ずつ投資してリスクを少なくする分割投資が最適となる．２章で述べたタイプのファジィ数理計画法による解とは異なり，分割投資策が得られる．ここで，次のことに注意すべきである．確率計画法の分散最小化モデルでは，期待値がある定められた値以上で分散（バラツキ）が最小となる解を求めているので，真の係数ベクトル（単位当たりの利得）が得られたときの最適値との差については何の保証も与えない．特に，分散最小化は，目的関数の最大化に関連しない副次的な目標であるため，期待値の制約が不適当な場合は，消極的な解に陥ってしまう．一方，最良ファジィ必然的最適解では，すべての可能な係数ベクトル（単位当たりの利得）に対する最適値との差の最大値（最悪値）を最小にしているので，真の係数ベクトルが得られたときの最適値との差について部分的な保証を与えることができる．

５．可能性理論による取り扱いの妥当性

２，４章では，ファジィ数理計画問題の不明確なパラメータを可能性分布として捕らえ，可能性測度や必然性測度を用いて取り扱ってきた．近年，これらの測度を用いず，メンバシップ関数により作られる面積に基づいた指標を用いる提案が多い．これらの提案の主張は，可能性測度や必然性測度では，二つのメンバシップ関数の交点の値しか解に影響しないという点にある．いずれの測度や指標を用いるべきかはメンバシップ関数をどのように解釈するかに依存しているので，一概にいずれが良いとはいい難い．しかし，次の４点で，著者は可能性理論に基づく取り扱いを推したい．

1. ファジィ係数をもつ目的関数や制約条件の左辺を計算するときに用いる拡張原理との一貫性がある．すなわち，拡張原理では，関数値がその値になる可能性を測っており，拡張原理により得られたファジィ集合は「可能性」という概念を保存しているので，可能性分布と考えても問題がない．
2. 係数ベクトルの空間上の可能性分布に基づいて測っても，拡張原理で計算した関数値上の可能性分布で測っても値が等しくなる．
3. 目的関数値や制約条件の比較するの値に要求される尺度は，順序尺度で十分である．したがって，厳密増加変換に対して一意である．ただし，４章のように，目的関数値の差を用いるときは，間隔尺度でなければならない．
4. 可能性測度を用いる場合は，メンバシップ値に要求される尺度も順序尺度で十分である．すなわち，比較する二つのファジィ集合のレベル集合族に対して一意対応が与えられていれば，十分である．必然性測度は，可能性分布を1−により逆転させるので，逆の対応があればよいが，この対応付けは現実的な意味が把握しにくい．一方，Gödel 含意や対偶 Gödel 含意を用いる場合は，可能性分布の逆転は起こらないので，可能性測度と同じく順序尺度で十分である．

最後の２点は，メンバシップ関数を定める上で非常に有用である．確率測度についても上の 1〜3 が成立する．しかし，平均や分散などのモーメントは，横軸の値が関係するので成立しない．したがって，測度として見るか，モーメントのような分布の特徴量で捕らえるかにより，上述の４点の成立・不成立の必要性は異なる．しかし，新しい指標を考える際，何らかの好ましい性質が欲しい（たとえば，確率におけるモーメントは，すべてのモーメント（積率母関数）がわかれば，確率分布が特定できるといった性質など）．なお，面積的な取り扱いをする一つの方法は，理論的基盤を Dempster-Shafer 理論に置くことである．この場合，対応する拡張原理の計算が非常にやっかいなものとなり，帰着される問題が複雑なものとなるだろうが，理論的整合性は保証される．

６．ファジィ数理計画法の課題

6.1 係数の従属性の取り扱いについて

ファジィ数理計画法の従来からの大きな欠点の一つに，不明確な係数間の従属性が取り扱えないということがある．近年，ファジィ数理計画法においても，係数の従属性を取り扱おうとする研究が見受けられるようになった．これらは，次の三つに分類することができる．

1. ２次形式メンバシップ関数（正規可能性分布）によるアプローチ [16,17]
2. 基準型ファジィ数によるアプローチ [18]
3. シナリオ分解によるアプローチ [19]

2次形式メンバシップ関数によるアプローチは，文献[17]に示されているように，多変量正規分布をもつ確率計画問題と同様なアプローチになる．したがって，係数ベクトルのファジィ集合は，平均ベクトルと分散共分散行列で規定される．言い換えれば，低次のモーメント（1次と2次）で分布を近似したものといえる．したがって，係数間の相互関係は，各2変量間の相関係数でのみ表現されている．理論的展開は多変量正規分布とほぼ同様になるため，多くの問題は，2次計画法を駆使して解くことができよう．この取り扱い易さの面で，種々の問題への適用可能性が高い．ただし，確率計画アプローチとどのように異なるのかが問題となる．これに対し，田中ら[16]は，メンバシップ値を重みとみなして，平均・分散を推定することにより，確率計画法と異なった解が得られることを示している．

一方，基準型ファジィ数によるアプローチ[18]では，n 変数の線形関数を型関数に代入したものを n 個作り，それらの min をとることにより，多変数のメンバシップ関数を定義しようとするものである．基準型ファジィ数の特殊な場合として，従来よく用いられてきた独立な（ピラミッド型の）ファジィ集合が含まれている．したがって，一般の基準型ファジィ数は，傾いた軸をもつピラミッド型の集合になる．従属性は，独立な基準型ファジィ集合からどれだけ傾いているかという指標で表される．興味深いアプローチであるが，著者の知る限り，2次元までしか研究されておらず，高次になると拡張原理による計算がかなり難解になるようである．

比較的単純そうで，よりファジィ的なアプローチができそうなものが，シナリオ分解によるアプローチである（著者は少なからず有望視している）．このアプローチでは，確率計画法（特に多段決定問題）において用いられてきたシナリオ分解の考え方を導入したもので，いま考えている変数以外の変数（シナリオ変数）を考え，シナリオ変数の値をある値，あるいは，ある領域に固定したときの他の変数を制限する条件付きファジィ数を用いて表現する．シナリオ変数が一定のもとでの条件付きファジィ数は独立と仮定されているが，現実には，専門家はこれ以上に細かく変数の従属性を答えることはできないと考えられる．文献[19]では，確率と可能性を混ぜて使用しているが，可能性だけでも取り扱うことができる．

係数間の従属性は，今後解決しなければならない課題であるが，近いうちにファジィらしいアプローチがでるものと期待できる．

6.2 他モデルへの適用に関する夢と希望

近年，ファジィ数理計画法におけるあいまいさの取り扱いについては，おおよそ共通の指針が与えられてきた．これにつれて，基本的な線形計画モデルへの適用から，さまざまな計画モデルへの適用へとファジィ数理計画法における研究対象が変わってきた．現在，特に，組合せ計画モデル，動的計画モデル，ゲーム理論への適用，および，GA（遺伝的アルゴリズム）や SA（アニーリング法）との融合に関する研究がよく見受けられる．

他モデルへファジィ数理計画法を適用したり，他手法との融合を考える際，常に目指すべきことは，

1. ファジィ数理計画法の利点と他手法の利点，他モデルの特徴とを合わせた利点に留まらず，何らかの相乗効果を得たいということ，すなわち，
$$\begin{aligned}&Merits(\mathrm{FMP}+\mathrm{Others})\\&\qquad > Merits(\mathrm{FMP})+Merits(\mathrm{Others})\end{aligned}$$
となること，
2. 他手法の欠点をファジィ数理計画法が補えること，あるいは，逆にファジィ数理計画法の欠点を他手法で補うこと，そして，他モデルの問題点をファジィ数理計画法で補うこと，すなわち，
$$\begin{aligned}&Demerits(\mathrm{FMP}+\mathrm{Others})\\&\qquad < Demerits(\mathrm{FMP})+Demerits(\mathrm{Others})\end{aligned}$$
となること

の2点である．この2点を実現することは容易ではなく，一般に，どのような観点からも上の2点がいえることは滅多にない．そこで，サブゴールとして，上の2点を合わせて，

$$\begin{aligned}&Merits(\mathrm{FMP}+\mathrm{Others})\\&\qquad + Demerits(\mathrm{FMP})+Demerits(\mathrm{Others})\\&\qquad > Merits(\mathrm{FMP})+Merits(\mathrm{Others})\\&\qquad + Demerits(\mathrm{FMP}+\mathrm{Others})\end{aligned}$$

が成立することと弱めたり，ファジィの場合でも解けるということだけになったりする．できるだけ，高次のゴールを目指すべきである．

特に，整数計画問題への適用，GA との融合に際して，相乗効果となりうる点を以下に列挙する．なお，これらは希望的観測であり，実現可能とは限らない．

〔整数計画問題への応用〕

1. 係数の不明確さを考慮したロバストな解を求めることによる限定の強化，分枝限定法の計算速度の向上
2. ソフトな最適性を満たす解を求めることによる分枝限定法の計算速度の向上

〔GA との融合〕

1. ソフトな最適性，有効性のもとでの複数の解候補の算出
2. GA が直接探索に対応していることによる，不明確な係数が取り扱い易くなること

7．おわりに

ファジィ数理計画問題の現状と課題について，著者の見解を述べさせていただいた．紙数の都合により，著者の研究に関連する内容に偏ってしまったことを御詫び申し上げる．

結局，ファジィ数理計画問題を取り扱うためには，問題の解釈に応じたモデルを用いることにある．モデルの意味を注意深く納得する必要がある．注意深い読者や研究者は，ファジィ数理計画問題におけるモデルの意味が未だ完全でないことに気付くであろう．たとえば，可能性理論はかなり精緻化されてはいるものの，メンバシップ関数の同定問題，測度を構成する演算子の選択問題，尺度構成の問題など，細かい問題は残されている．このことは，理論的研究の存続の必要性を意味する．

また，たとえば，ポートフォリオ理論のように，数理計画法を適用するだけではなく，それに関連した理論が展開されている分野もある．従来，不確実性が伴った問題においては，確率論を基にして理論展開されてきた．勿論，ファジィ理論（可能性理論）を基にした理論展開も可能である．現実には，数式によるモデル化の限界などから，意思決定手法による解をそのまま適用することは少なく，決定支援や分析のために用いられることが多い．このような場合，違った観点からのアプローチも必要となろう．従来の確率論による解析ばかりではなく，ファジィ理論による解析があっても良い．従来の観点とはひと味違った，ファジィ理論らしいアプローチを期待したい．

最後に，モデルの意味の検討は，現実問題へ応用する際にも重要となる．モデルの意味に応じた適用でなければ，無意味なことにしかならない．現在，ファジィ数理計画法は，主として電力計画問題に応用されているようである．電力計画問題に限らず，どのような計画問題へもファジィ数理計画法は適用可能である．

ファジィ数理計画法がより精緻化され，多くの問題へ応用され，更なる発展を遂げることを期待して，筆をおかせて頂きたい．

参考文献

1. L. A. Zadeh: Fuzzy Sets and Systems, Presented at the Symposium on System Theory, Polytechnic Institute of Brooklyn, April 20-22, 1965 (republished in Int. J. General Systems, Vol.17, 129-138 (1990))
2. R. E. Bellman and L. A. Zadeh: Decision-Making in a Fuzzy Environment, Management Sci., Vol.17, B141-B164 (1970)
3. 田中，奥田，浅居：Fuzzy 数理計画法，計測自動制御学会論文集，Vol.9, 607-613 (1973)
4. H. Tanaka, T. Okuda and K. Asai: On Fuzzy Mathematical Programming, J. Cybernetics, Vol.3, 37-46 (1974)
5. C. V. Negoita, S. Minoiu and E. Stan: On Considering Imprecision in Dynamic Linear Programming, Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, No.3, 83-95 (1976)
6. 坂和：線形システムの最適化＜一目的から多目的へ＞，森北出版 (1985)
7. 坂和：ファジィ理論の基礎と応用，森北出版 (1989)
8. M. Sakawa: Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press, New York, London (1993)
9. M. Inuiguchi, H. Ichihashi and H. Tanaka: Fuzzy Programming: A Survey of Recent Developments, in R. Slowinski and J. Teghem (Eds.), Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 45-68 (1990)
10. 乾口：ファジィ数理計画法，ファジィＯＲ（浅居，田中 (編))，日刊工業新聞社，41-90 (1993).
11. 乾口：ファジィ数理計画問題の可能性理論に基づく体系的定式化法，大阪府立大学博士論文 (1991)
12. M. Inuiguchi and M. Sakawa: Possible and Necessary Optimality Tests in Possibilistic Linear Programming Problems, Fuzzy Sets and Systems, Vol.67, 29-46 (1994)
13. 市橋，乾口：可能性理論にもとづくファジィ多目的線形計画法，オペレーションズ・リサーチ，Vol.36, No.9, 440-444 (1991)
14. 乾口：確率計画問題とファジィ数理計画問題，日本ファジィ学会誌，Vol.4, No.1, 21-30 (1992)
15. 乾口，坂和：ファジィ目的関数のロバストでソフトな最適化，日本オペレーションズ・リサーチ学会 1995 年度春季研究発表会アブストラクト集，(1995)
16. 田中，中山，石渕：可能性ポートフォリオ選択，第 10 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，739-740 (1991)
17. 乾口，久米：確率計画問題と可能性計画問題の等価条件について，システム制御情報学会論文誌，Vol.4, No.6, 255-257 (1991)
18. J. Ramík and K. Nakamura: Canonical Fuzzy Numbers of Dimension Two, Fuzzy Sets and Systems, Vol.54, 167-180 (1993)
19. 太田，山口，高野：係数間の関係を考慮したファジィ多目標計画法，日本ファジィ学会誌，Vol.6, No.1, 166-176 (1994)