

最適配置問題をボロノイ図で考える

鈴木敦夫

南山大学数理情報学部数理科学科

〒489-0863 瀬戸市せいれい町27

Email: atsuo@nanzan-u.ac.jp

1. はじめに

ボロノイ図は平面を与えられた点のどれに近いかによって分割したものである(図1)。ボロノイ図は施設配置問題のモデルに用いられてきた。これらの問題は地理的最適化問題と呼ばれ、一連のモデルが提案され解法が示されている。ここではボロノイ図のバリエーションを実際問題に適用する例を2つ考える。従来は、ボロノイ図を用いて作成したモデルは、思考実験的な側面が強く、配置問題としての意味づけは現実的でない場合も多かった。ここで考える例は、実際問題にボロノイ図を適用した例である。第1の例は現実問題に適用する例、第2の例は、ボロノイ図を用いることで実際問題の解法を改善する例である。

第1の例は、救急車の担当地区の決定問題(管区割問題と呼ぶ)にネットワークボロノイ図を用いるものである。ネットワークボロノイ図はネットワーク上に与えられた点(母点)のどれに近いかによってそのネットワークを分割したものである(図2)。救急車が配備されている消防署を母点とし、道路ネットワークをボロノイ分割することで、担当地域を定量的に決定することができる。ネットワークボロノイ図を用いることで、ある地点に最短時間で到達できる消防署はどこか、2番目はどこかがわかるからである。従来の管区割は各市ごとに町丁目単位で経験、もしくは地図上で大体的見当で決定されていたが、この手法を用いれば、より合理的に管区割を行うことができるはずである。

第2の例は、競争立地の問題である。ここで扱うのは、既存の競合店舗が複数存在するときに、あらたな店舗を設置する最適な場所を決定する問題である。この問題はラゲールボロノイ図を用いて効率良く解ける。ラゲールボロノイ図は平面上に与えられた円のどれにラゲール距離の意味で近いかによって平面を分割したものである(図3)。この問題は、Dreznerら[1]によってすでに取り上げられ解法が提案されているが、ラゲールボロノイ図を用いることで、その解法を改善することができる。問題の実際的な意味には大きな影響はないものの、アルゴリズムの面で興味深い結果である。

これらの問題はいずれも実際の問題を解く過程で、ボロノイ図を用いることが自然であることが導かれた。このことはボロノイ図が、モデル化のツールとして従来用いられてきた以上に広範な適用範囲を持っていることを示唆しているのではないかと考えられる。

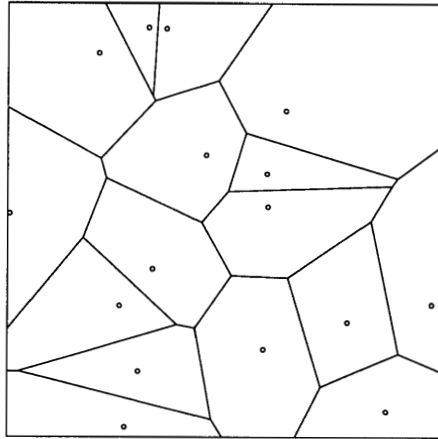


図1 単位正方形上にランダムに分布する母点に対するボロノイ図の例
母点の数：16個

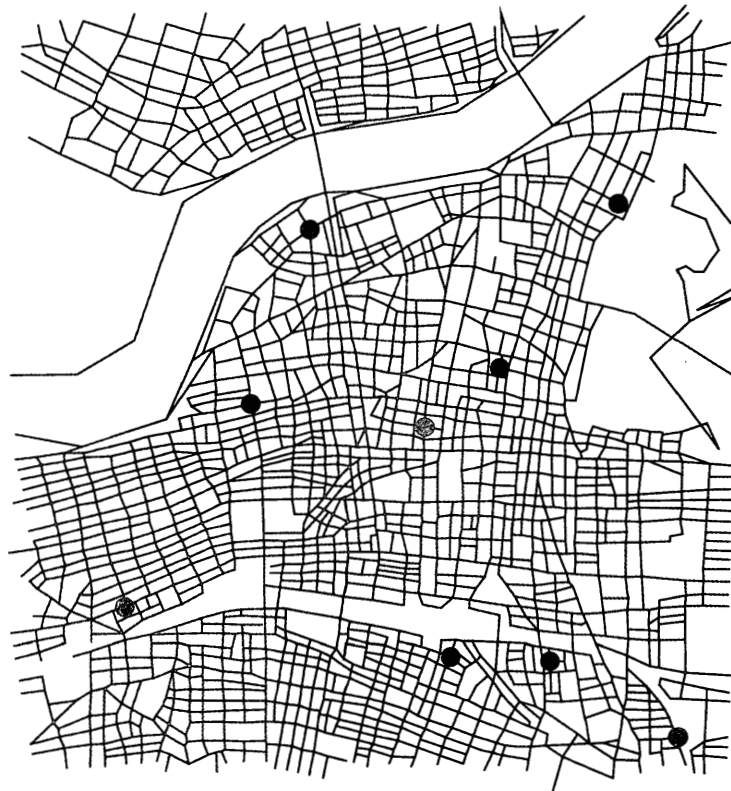


図2 岐阜市道路ネットワーク（提供：田口東氏）のネットワークボロノイ図
母点の数：9個

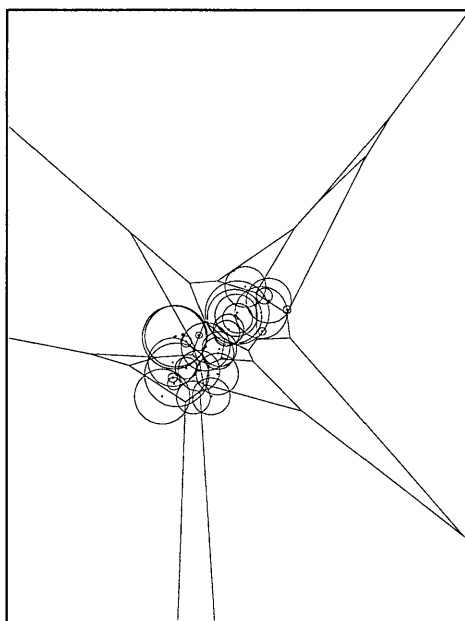


図3 ラゲールボロノイ図の一例
(杉原厚吉氏のプログラム[5]による)

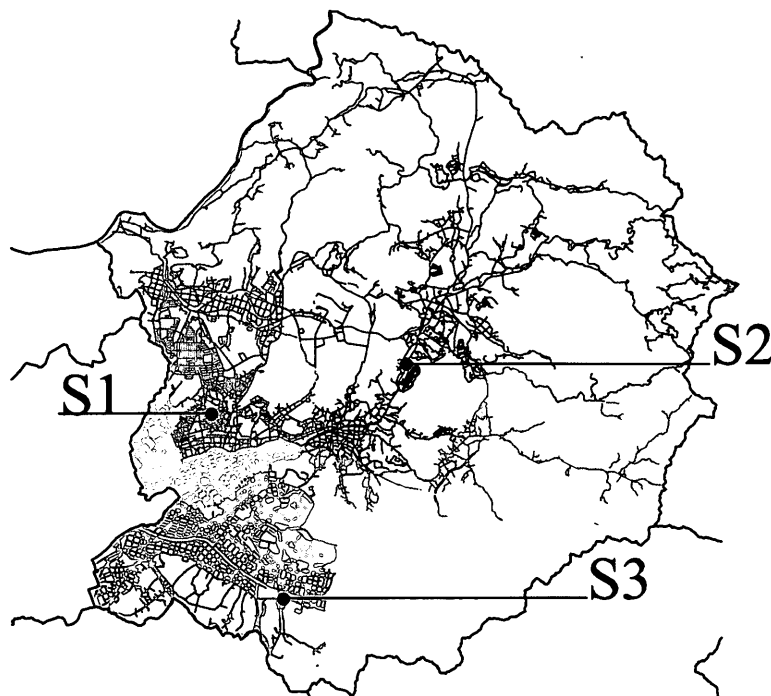


図4 瀬戸市の救急車の管区割 (S1, S2, S3は消防署の位置をあらわす)
道路ネットワークは国土数値情報による

2. 救急車の管区割問題

名古屋市、瀬戸市などでは、地区を3台の救急車でサービスしている。すなわち、その地区に最も近い消防署、2番目、3番目に近い消防署に配置された3台の救急車はその地区を担当している。その地区内で救急車に出動要請があった場合、まず、1番目の消防署に出動要請があり、その救急車が他に出動中だと、2番目に近い救急車に出動要請が回されるといった具合である。

各救急車の担当区域を管区と呼ぶ。たとえば、瀬戸市には3箇所の消防署があり、そこに4台の救急車が配置されている。その場合、瀬戸市は6つの管区に分割されている。図4は瀬戸市の実際の管区を用いて道路ネットワークを色分けしたものである。消防署をS1, S2, S3とすると、例えば図4の緑の管区では(S1, S2, S3)の順に出動要請を行う。

管区はいままでの経験によって決められており、しばしば十年以上のも変更が加えられていない場合がある。瀬戸市の場合、昨年から中心部にトンネルが開通し、その際に十何年ぶりに管区を変更したようである。

現在、救急車が近代化され、蘇生技術も発達し、たとえ心肺停止状態に陥った患者でもすぐに救急車が駆けつけて処置をほどこせばかなりの確率で命を取りとめることができるようになっている。その意味で、救急車の現場への到達時間の短縮が重要性を増している。管区割問題に定量的な手法を導入することで、到達時間の短縮が期待できる。

管区割問題は平均到達時間を秒単位で短縮しなくてはならない。また、その何秒かの時間が患者の命を左右する貴重なものである。したがって、モデルは細部にまで現実を反映したものでなくてはならない。救急車の到達時間を正確に計算するためには、救急車は道路上を移動するので、道路ネットワークを用い、その管区割問題には道路ネットワーク上のボロノイ分割を用いるのが自然である。

ネットワーク上のボロノイ分割は以前から考えられていた。近年、応用を念頭において、さまざまな一般化がおこなわれている。その中で、古田ら[2]はこれを高次ネットワークボロノイ図に一般化した。図5は瀬戸市の道路ネットワークの消防署を母点としたボロノイ分割である。これは1番近い消防署はどこかによって瀬戸市の道路ネットワークを分割している。たとえば、図5の緑はS1に一番近いネットワーク上の点、枝を示している。

古田らのプログラムを用いると、 k 番目に近い母点はどれかによってネットワークを分割することができる。図6は消防署を母点とし、2番目に近い母点はどれかによって瀬戸市の道路ネットワークを分割したものである。図7は3番目に近い母点による。図5～図7をまとめると、瀬戸市の救急車の管区割ができる。図8は、瀬戸市の道路ネットワークを消防署S1, S2, S3の3箇所の消防署にどの順序で近いかによって、分割したものである。

図4が現在の瀬戸市の管区割、図8がネットワークボロノイ図で作成した管区割である。これらの管区割の差異が平均到達時間に換算するとどの程度になるか、稲川ら[3]による連続時間型マルコフ連鎖を用いたモデルによって分析する予定である。

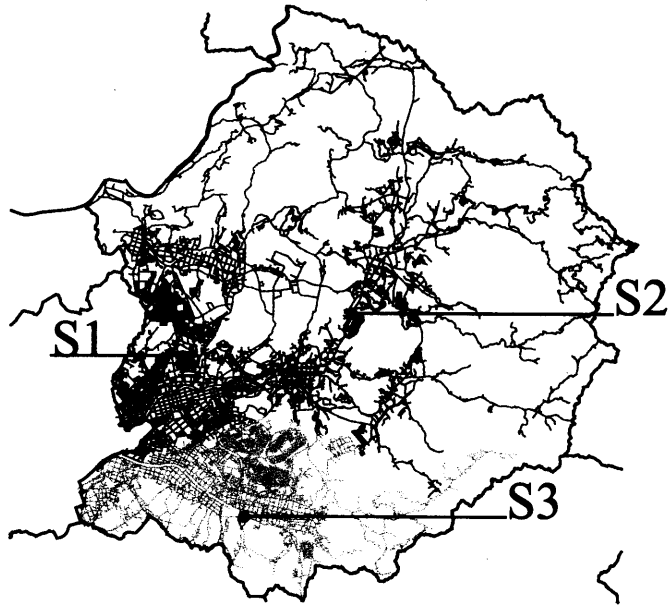


図5 瀬戸市道路ネットワークの1次ボロノイ分割
S1, S2, S3は消防署の位置をあらわす

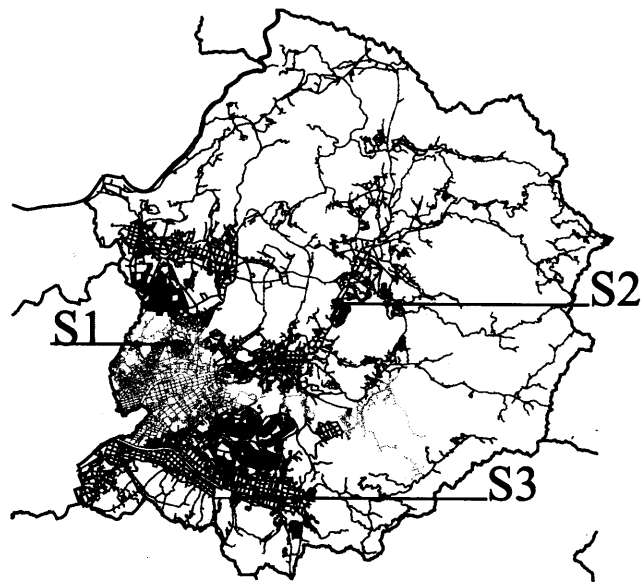


図6 瀬戸市道路ネットワークの2次ボロノイ分割
緑の領域はS1に2番目に近い領域をあらわす

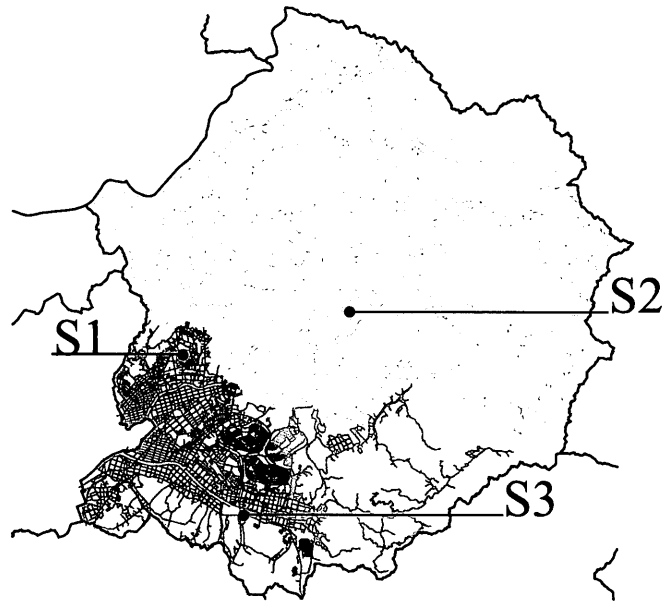


図7 瀬戸市道路ネットワークの3次（最遠）ボロノイ分割
 緑の領域は S1 に 3 番目に近い（1 番遠い）領域をあらわす

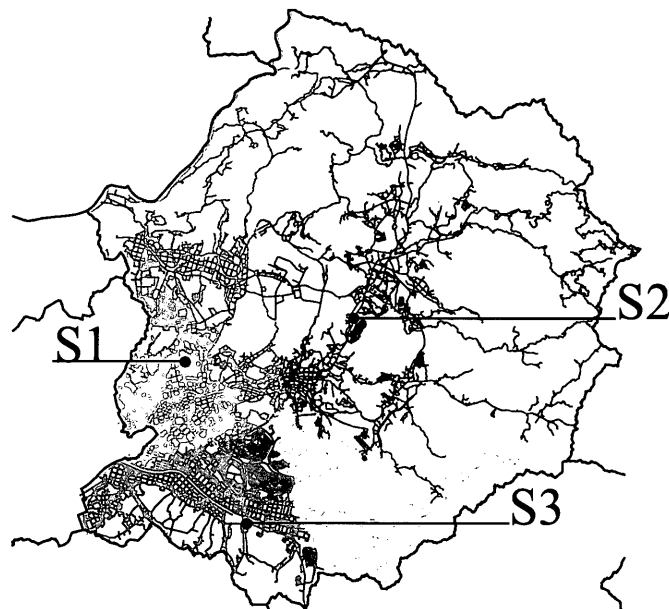


図8 瀬戸市の高次ネットワークボロノイ図を用いた管区割
 図4 の実際の管区割と色を合わせてある。たとえば青は（S2,S1,S3）の順に近い領域

3. 競争立地の問題

利用者が平面上に離散的に分布し、直線距離でもっとも近い商業施設を利用すると仮定する。この仮定のもとで、あらたな施設を1箇所に設置する際に、どの場所に設置すればよいかを求める問題を考える。ある利用者を考えると、その利用者からもっとも近い商業施設までの距離を半径とする円の内部にあらたな施設ができればそれを利用する。したがって、各利用者を中心にして、それぞれの利用者の最も近い施設までの距離を半径とした円を描き、もっとも多くの円が重なる地点（領域）に新たな施設を設置すれば、もっとも多くの利用者を獲得できるようになる。

このとき描かれないずれの円も、別の円の内部に含まれることはない。なぜなら、これらのすべての円の周上には既存の商業施設をあらわす点が存在し、これらの点は、他の円の内部にあることはないからである。もし、ある円の内部にこの点があれば、この点がその円からもっとも近い商業施設をあらわすことになり、円の描き方に矛盾する。

この問題は、幾何学的にはどの円も他の円の内部に含まれないときに、円の重なりを求める問題である。Dreznerら[1]は、 n 個の円に対しての $O(n^2 \log n)$ のアルゴリズムを提案している。鈴木ら[6]はラゲールポロノイ図を用いるアルゴリズムで、 $O(n \log n)$ の手間でこの問題が解けること示した。

ラゲールポロノイ図の構成算法は今井ら[4]によって分割統治法による $O(n \log n)$ の算法が提案されている。また、アルゴリズムは異なるが、実用的なFORTRANプログラムが、杉原によって公開されている[5]。図3はこのプログラムによるものである。

ラゲールポロノイ図を用いることで与えられた多数の円の結びを効率的に求められることは従来から指摘されていた。さらに円が他の円の内部に含まれない場合には、与えられた円の重なりも効率的に求められることがわかった。

アルゴリズムはごく単純である。まず、与えられた円のラゲールポロノイ図を構成する。次に、ラゲールポロノイ図の辺と点（いずれも $O(n)$ 個ある）を適当な点からスタートして幅優先もしくは深さ優先でスキャンする。辺をスキャンするときにはその辺を生成する2つの円が交点を持つかどうかをチェックする。点をスキャンするときには、この点を生成する3つの円が交点を持つかどうかをチェックする。これにより、もっとも円が重なっている領域を決定することができる。

現在、この問題のネットワーク上への拡張を古田らが考えている。たとえば、コンビニエンスストアなどの比較的密に分布している商業施設に関して、直線距離で近さを定義した場合、実際の道路距離との誤差が無視できなくなるかもしれない。これを克服するために、ネットワークポロノイ図のバリエーションを用いることを考えている。利用者は道路距離で最も近い施設を利用する仮定は同じである。実際例として、瀬戸市のコンビニエンスストアの新規立地問題を取り上げる。利用者を瀬戸市の約300町丁目ごとに1つにまとめてネットワーク上の300個の点としてあらわす。これらの点から既存の約30件のコン

ビニエンスストアのうちの最も近いものまでの道路距離をそれぞれ求める。そして、これらの点を出発点として瀬戸市の道路ネットワーク上で求めた道路距離以内のサブネットワークをそれぞれ求める。このサブネットワークの最も重なったところを求めれば、それが、新規にコンビニエンスストアを立地する候補点となる。

このような候補地点が得られれば、より具体的にどの町丁目については、どこの競合店と競うのかもはっきりわかり、新規に出店するコンビニエンスストアの店舗の計画にも有効であろう。

4. おわりに

ネットワークボロノイ図とラゲールボロノイ図はボロノイ図のバリエーションであるが、かなり異なっている。その2つのボロノイ図が同時期に研究の対象になったことは興味深い。そのどちらもが、実際の問題を解決する過程で、自然にモデル化の道具として使われている。さらに多くの実際の問題がボロノイ図を用いて解決できそうである。

その環境は2つの意味で整ってきた。

1つめは、PCがますます高性能になり、広く普及したことである。ここで取り上げた2つの「ボロノイ」もごく気楽にPC上で描くことができる。ごく短時間で画面上にカラーで結果を表示できる。10年前には不可能だったことである。

2つめは、データが整備されはじめたことである。国土数値情報はWEB上で公開され、自由に利用できる。また、人口データなど、国勢調査によって得られたデータも誰でも無料で気軽に利用できる。これもまた大きな進歩である。

これらの進歩が今後、配置問題の研究に大きな影響を与えそうである。最適配置問題のモデル作成にボロノイ図がますます威力を発揮することになるであろう。

参考文献

- [1] Drezner, T. and Z. Drezner, Competitive facilities: Market share and location with random utility, *Journal of Regional Science*, 36, 1996, pp. 1-15.
- [2] Furuta, T., A. Suzuki, and K. Inakawa, The k-th nearest network Voronoi diagram and its application to districting problem of ambulance systems, submitted to *JORSJ*.
- [3] 稲川啓介, 鈴木敦夫, 連続時間型マルコフ連鎖を用いた緊急車両配備問題について, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, 47巻, 2004年, pp.25-39.
- [4] Imai, H., M. Iri, and K. Murota, Voronoi diagram in the Laguerre geometry and its applications. *SIAM J. on Computing*, Vol. 14, 1985, pp. 93-105.
- [5] 杉原厚吉, <http://www.simplex.t.u-tokyo.ac.jp/~sugihara/opensoft/opensoft.html>
- [6] Suzuki, A., Z. Drezner, and T. Drezner, Locating multiple facilities in a planar competitive environment, manuscript.