グラフを通したパズル・ゲームの一般化

岡本　吉央

パズルやゲームの中には登場するモノの間の相互関係が重要になるものが多い．例えば，本特集における伊藤大雄氏の記事ではジャンケンにおける各手の関係を有向グラフとして見ることにより，その一般化を考察している．本稿ではほかの例として「アルクインの川渡りパズル」と「帽子パズル」を考察対象とする．この 2 つについては近年研究が進んでおり，そのなかで未解決である問題についても言及する．

キーワード：論理パズル，グラフ，頂点被覆，クリーク，アルクイン数

1．アルクインの川渡りパズル

9 世紀，アルクインは『青年達を鍛えるための諸命題』(*Propositiones ad Acuendos Juvenes*) という問題集を書いた．その中の第 18 問が以下のものである [7].

> **オオカミ，ヤギ，そして一束のキャベツ**
> ある男が川を越えてオオカミ，ヤギ，そして一束のキャベツを運ばねばならなかった．ところがそれらのうちの二つを運ぶことのできる船しか他には船を見つけることはできなかった．彼の使命は，これらすべてをまったく無償で運ぶことであった．いかにしてこれらを無償で運ぶことができたのかを言いなさい．

ここでは，男の監視がない場合には，オオカミがヤギを食べ，ヤギがキャベツを食べることが前提とされている．解答については読者の皆さんにお任せする．

なお，アルクインのこの書には川渡りに関する問題が 4 つあり，これはそのなかの 1 つにすぎない．

では，この川渡りパズルにおけるオオカミ，ヤギ，キャベツの相互関係を無向グラフによって以下のとおり表現してみる．まず，オオカミ，ヤギ，キャベツのそれぞれに対応する頂点を用意する．そして，「男の監視なしで同時にいてはいけない 2 つ」に対応する頂点間に辺を引く．そうすると，図 1 のようなグラフが得られる．

W がオオカミ，G がヤギ，C がキャベツを表す．これは頂点数 3 のパスであり，よく P_3 と表記される．

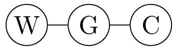

図 1　川渡りパズルにおける相互関係

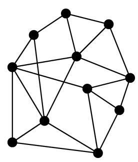

図 2　無向グラフの例

いま，この状況を任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して考える（ここで，V はグラフ G の頂点集合，E は G の辺集合である）．つまり，運ぶべきモノ全体が V で表されており，「男の監視なしで同時にいてはいけない 2 つ」に対応する頂点間に辺を引き，その全体を E とするのである．図 2 のグラフは頂点を 11 個持ち，辺を 21 個持つ．

考えたい問題は川渡りが可能になるための船の容量の最小値である．ここで船の容量とは，男以外に船に載せられるモノの数のことである．例えば，オオカミ，ヤギ，キャベツの場合，つまり，グラフが頂点数 3 のパスの場合は，船の容量を 1 とすればすべてのモノを向こう岸に運ぶことができるが，船の容量が 0 だったとすると，すべてのモノを向こう岸に運ぶことはできない．すなわち，頂点数 3 のパス P_3 に対しては，川渡りを可能にする船の容量の最小値は 1 になる．

一般に，無向グラフ G で表現される状況において，川渡りを可能にする船の容量の最小値を $\mathbb{A}(G)$ と書いて，グラフ G のアルクイン数と呼ぶことにする．つまり，考える問題は与えられたグラフ G のアルクイン数 $\mathbb{A}(G)$ が何であるか定めることである．オオカミ，ヤギ，キャベツの場合は $\mathbb{A}(P_3) = 1$ であることを示して

おかもと よしお
電気通信大学大学院情報理工学研究科
〒 182–8585 東京都調布市調布ヶ丘 1–5–1

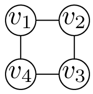

図 3　頂点数 4 の閉路

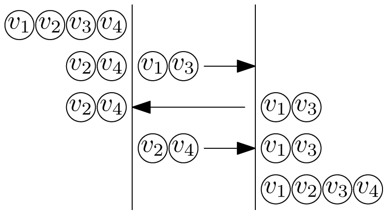

図 4　$\mathbb{A}(C_4) \leq 2$ の証明

いる．

例として，図 3 に示すような頂点数 4 の閉路を考える．頂点数 4 の閉路は C_4 と表記される．

いまから，$\mathbb{A}(C_4) = 2$ であることを証明する．まず，$\mathbb{A}(C_4) \leq 2$ であることを証明する．そのためには，容量 2 の船を使えば川渡りが可能であることを示せばよい．実際，図 4 に示す方法で川渡りが可能になる．

次に，$\mathbb{A}(C_4) \geq 2$ であることを証明する．そのためには，容量 1 の船を使っても川渡りが可能でないことを示せばよい．では仮に，容量 1 の船を使って川渡りが可能であるとする（背理法による証明を念頭に置いている）．このとき，最初に船へ載せて運ぶモノに対応する頂点を考える．閉路の対称性から，その頂点が v_1 であるとして一般性を失わない．そうすると，岸に v_2, v_3, v_4 が残されてしまうが，v_2 と v_3 は同時にいてはいけないので，川渡りが可能であることに矛盾する．したがって，容量 1 の船を使って川渡りが可能ではないことになる．

つまり，$\mathbb{A}(C_4) = 2$ である．

では，一般のグラフ $G = (V, E)$ のアルクイン数 $\mathbb{A}(G)$ については何が言えるだろうか？

頂点数 4 の閉路に対して $\mathbb{A}(C_4) \geq 2$ であることを証明したときと同様に，最初に船へ載せて運ぶモノの集合に対応する頂点部分集合 $S \subseteq V$ を考える．この S に対応するモノを船に載せて運んでいる間，補集合 $V - S$ の中に同時にいてはいけない 2 つのモノがあってはいけない．つまり，グラフ G から S を除去したグラフ $G - S$ に辺があってはいけない．この性質を満たす S，つまり $G - S$ に辺がないような頂点部分集合 S のことを G の頂点被覆 (vertex cover) と呼ぶ．つまり，G の頂点被覆の最小サイズを $\mathrm{vc}(G)$ と書くと，船の容量は $\mathrm{vc}(G)$ 以上でないといけないことがわかる．

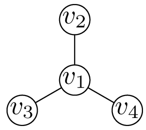

図 5　頂点数 4 のグラフ $K_{1,3}$

すなわち，$\mathbb{A}(G) \geq \mathrm{vc}(G)$ である．

一方，容量が $\mathrm{vc}(G) + 1$ である船を使えば必ず川渡りが可能になる．そのためには，$\mathrm{vc}(G) = |S|$ を満たす G の頂点被覆 S を常に船に載せておけばよい．容量は $|S|$ よりも 1 だけ大きいので，その余っている容量 1 を用いて，$V - S$ の各頂点に対応するモノを順に運べばよいのである．すなわち，$\mathbb{A}(G) \leq \mathrm{vc}(G) + 1$ となる．

以上の議論を総合すると，

$$\mathbb{A}(G) = \mathrm{vc}(G) \text{ または } \mathrm{vc}(G) + 1$$

となることがわかる．問題はこの 2 つの値のどちらが真の $\mathbb{A}(G)$ となるのかを定めることになる．頂点数 4 の閉路 C_4 の場合，$\mathrm{vc}(C_4) = \mathbb{A}(C_4) = 2$ であり，頂点数 3 のパス P_3 の場合，$\mathrm{vc}(P_3) = \mathbb{A}(P_3) = 1$ である．

実際に $\mathbb{A}(G) = \mathrm{vc}(G) + 1$ となるものの例に図 5 に示す $K_{1,3}$ がある（claw と呼ばれる）．

このグラフにおいて $\{v_1\}$ は頂点被覆であり，頂点数 0 の頂点被覆は存在しないので，$\mathrm{vc}(K_{1,3}) = 1$ である．しかし，次の段落で説明するとおり，容量 1 の船で川渡りを実現できないので，$\mathbb{A}(G) \neq 1 = \mathrm{vc}(K_{1,3})$ である．したがって，$\mathbb{A}(G) = \mathrm{vc}(K_{1,3}) + 1 = 2$ になる．

では，なぜ容量 1 の船で川渡りが実現できないのだろうか？ グラフを見ると $K_{1,3}$ において v_1 はほかのすべての頂点と隣接していることに注意しよう．いま，容量 1 の船で川渡りができると仮定する．川渡りを行っているとき，v_2, v_3, v_4 に対応するモノはある順で向こう岸に移動させられるが，それが v_2, v_3, v_4 の順に行われるものとする（一般性を失わない）．ここで，v_3 を船に載せて向こう岸に移動しているまさにそのとき，v_2 がすでに向こう岸にあり，v_4 はまだ向こう岸に渡っていない．しかし，船の容量は 1 なので，この瞬間 v_1 は船に載っておらず，どちらかの岸にあることになる．しかし，v_1, v_2 も v_1, v_4 も同時にいてはいけないモノに対応しているので，これは矛盾である．

グラフ G のアルクイン数が $\mathrm{vc}(G)$ か $\mathrm{vc}(G)+1$ になるという事実からいろいろな帰結を導くことができる．

例えば，$\mathbb{A}(G)$ の計算が NP 困難であることは次のようにしてわかる．よく知られているように，$\mathrm{vc}(G)$ の

計算はNP困難であるので，$\mathbb{A}(G)$ が多項式時間で計算できたら，$\mathrm{vc}(G)$ も多項式時間で計算できるということを示す．そのために，G を2つ並べたグラフ $G+G$ を考える．このとき，$\mathrm{vc}(G+G)=2\mathrm{vc}(G)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}2\mathrm{vc}(G)&=\mathrm{vc}(G+G)\\&\leq\mathbb{A}(G+G)\\&\leq\mathrm{vc}(G+G)+1\\&=2\mathrm{vc}(G)+1\end{aligned}$$

である．つまり，$\mathbb{A}(G+G)$ は $2\mathrm{vc}(G)$ か $2\mathrm{vc}(G)+1$ なのであるが，それは $\mathbb{A}(G+G)$ の偶奇を見れば判断できる．すなわち，$\mathbb{A}(G+G)$ が偶数ならば，$\mathbb{A}(G+G)=2\mathrm{vc}(G)$ であり，$\mathbb{A}(G+G)$ が奇数ならば，$\mathbb{A}(G+G)=2\mathrm{vc}(G)+1$ である．これは，$\mathbb{A}(G+G)$ が計算できれば $\mathrm{vc}(G)$ も計算できるということを意味している．これでNP困難性の証明が終わる．

アルクイン数 $\mathbb{A}(G)$ の計算がNP困難であるということはある種の二面性を持っているように思える．すなわち，(1) $\mathrm{vc}(G)$ を計算することの難しさが $\mathbb{A}(G)$ の計算に引き継がれているという側面と (2) $\mathrm{vc}(G)$ か $\mathrm{vc}(G)+1$ のどちらが $\mathbb{A}(G)$ であるのかを決める難しさがあるという側面である．上で紹介したNP困難性の証明は $\mathrm{vc}(G)$ の計算がNP困難であるようなグラフクラスに制限しても矛盾がない．そのようなグラフクラスとして，例えば，平面的グラフ (planar graph) がよく知られている．面白いことは何かというと，上の証明から平面的グラフに対してアルクイン数の計算はNP困難であるのだが，アルクイン数 $\mathbb{A}(G)$ が $\mathrm{vc}(G)$ なのか $\mathrm{vc}(G)+1$ であるのかどちらかなのかということは多項式時間で判定できるのである．つまり，平面的グラフに制限するとアルクイン数計算の難しさの本質は (1) のほうにあると言える．

では，アルクイン数計算の難しさの本質が (2) のほうにあるような場合はあるのだろうか？ つまり，$\mathrm{vc}(G)$ の計算は多項式時間で可能であるのに，$\mathbb{A}(G)$ の計算がNP困難となるようなグラフクラスの存在を気にしているのである．本稿執筆時点（2012年12月）では，そのようなグラフクラスは知られていない．これはアルクイン数にまつわる未解決問題の中で大きなものの1つである．

文献案内

本節の内容の大部分はCsorba, Hurkens and Woeginger [1] に従った．本節に出てくる結果のすべてが彼らによるものであるとは限らないが，詳細はそこにある文献表を見ていただきたい．グラフへの一般化を始めに考えたのはPrisnerとBahlsで，Prisnerは2002年に講義の題材として使い，Bahlsは2005年にセミナーで言及したようである．川渡りに必要な船の移動回数に関する制限を設ける場合も彼らの論文で議論されている．

2. 帽子パズル

P. Winklerの書籍にも登場する次のようなパズルを考える [8].

> 帽子チームの再登場である[1].
> 今回は，各人の帽子の色は，歪んでいないコインを投げて決める．全員で円形に並び，各人はほかの全員の帽子が見える．帽子をかぶらされた後は情報交換はいっさい認められない．その後，一人ひとりは別々のところに連れて行かれ，自分の帽子の色が赤か青かを当てるか，それとも「パス」をするか，を選ばされる．
> 課題は苛酷である．少なくとも1人は帽子の色を当てようとしなければならないのだが，当てようとした限りは当てようとした全員が正解でなければならず，さもなければ，全員が処刑される．

この状況で処刑を免れる確率を最大にする戦略を考えるのがこのパズルの主題である．

用語を簡潔にするため，処刑を免れることを「勝利」と呼び，そうでないことを「敗北」と呼ぶことにする．また，登場する各人を囚人と呼ぶことにする．

勝利確率1/2を達成する簡単な戦略として以下の盲目白紙委任戦略がある．まず代表を1人決めておく．そして，帽子が配られた後，その代表のみが色の宣言をするが，そのとき，確率1/2で赤を，確率1/2で青を宣言する．

そのため真の問題は「勝利確率を1/2より真に大きくするような戦略は存在するか？」ということである．

実は3人の場合には次のような戦略がある．各囚人はほかの2人の囚人の帽子の色を見るが，その色がともに赤である場合，囚人は青を宣言し，その色がともに青である場合，囚人は赤を宣言する．もし，他の囚人の帽子が互いに異なる場合はパスをする．

---

[1] この書籍では囚人に帽子がかぶせられ，過酷なゲームに挑戦しなくてはいけないという場面が何度も登場するのである．

さて，この戦略における勝利確率は何だろうか？ この戦略における各囚人の振る舞いは表 1 のようになる．ここで「非」はパスを意味する．

表 1 を見てわかるとおり，勝利確率は 6/8，すなわち 3/4 である．

囚人数を n としたときに達成できる勝利確率の最大値を表にすると表 2 のようになる．

特に，この数列は単調非減少であり，$n \to \infty$ のとき 1 に収束する．また，$n+1$ が 2 のべきのとき，これが $n/(n+1)$ になることもわかっている．例えば，$n=7$ のとき，勝利確率の最大値は 7/8 である．

では，このパズルにおける囚人の相互関係を無向グラフで表してみる．ここでの相互関係は「互いに帽子の色を見ることができる」という関係であるとする．つまり，3 人の囚人 $1,2,3$ がいる場合，対応するグラフは図 6 のものである．

これは頂点数 3 の完全グラフであり，よく K_3 と表記される．

いま，この状況を任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して考える．つまり，頂点集合がプレイヤーを表現し，互いに帽子の色を見ることができる 2 人の囚人の間に辺を引いて G を作るのである．例えば，図 7 のグラフにおける状況では，囚人が 5 人いて，囚人 1 の立場からは囚人 2 と囚人 5 の帽子の色は見えるが，囚人 3 と囚人 4 の帽子の色は見えないということになる（図 7）．図 7 の無向グラフを H と呼ぶことにする．

元のパズルではどの囚人の帽子の色も見ることができたので，考えるグラフは完全グラフに対応する．

考えたい問題はグラフ G で表された状況における囚人の勝利確率の最大値である．これを $h(G)$ と書くこと

表 1　勝利確率を 3/4 にする戦略

帽子の色			宣言			結果
赤	赤	赤	青	青	青	敗北
赤	赤	青	非	非	青	勝利
赤	青	赤	非	青	非	勝利
赤	青	青	赤	非	非	勝利
青	赤	赤	青	非	非	勝利
青	赤	青	非	赤	非	勝利
青	青	赤	非	非	赤	勝利
青	青	青	赤	赤	赤	敗北

表 2　囚人数 n に対する最大勝利確率の変化

n	2	3	4	5	6	7	8	9
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{225}{256}$

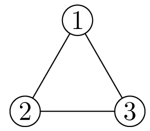

図 6　帽子ゲーム（$n=3$ の場合）に対応する無向グラフ K_3

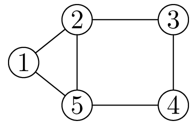

図 7　より複雑な帽子ゲームに対応する無向グラフ H

にする．先ほどの表からは $h(K_2)=1/2, h(K_3)=3/4$ などがわかる．

例えば，上のグラフ H を考えると，$h(K_3)=3/4$ であることから $h(H) \geq 3/4$ であることが次のようにしてすぐにわかる．すなわち，囚人 3 と囚人 4 は必ず宣言しないことにしておき，囚人 1，囚人 2，囚人 5 だけで K_3 における最適戦略を用いるのである（不等号になっているのは，これよりもよい戦略があるかもしれないからである）．一般に，グラフ G の部分グラフ G' に対して，$h(G) \geq h(G')$ になることがこの議論からわかる．

では，$h(H) \leq 3/4$ であることを今から証明する．証明には「二重の数え上げ」(double counting) と呼ばれる，離散数学において重要な証明手法を用いる．

一般に，囚人数が n であるとき，赤と青の帽子のかぶせ方は 2^n 通り存在する．そして，囚人の戦略を固定すると，赤と青の帽子のかぶせ方 A が決まったとき，次のいずれかが起こる．

(1) 1 人以上の囚人が宣言することにより，勝利する．
(2) 1 人以上の囚人が宣言することにより，敗北する．
(3) 誰も宣言をせずに，敗北する．

2^n 通り存在するかぶせ方の中で，(1) に該当するものをすべて集めた集合を W，(2) に該当するものをすべて集めた集合を L，(3) に該当するものをすべて集めた集合を N とする．このとき，$|W|+|L|+|N|=2^n$ であり，この戦略がもたらす勝利確率は

$$\frac{|W|}{|W|+|L|+|N|}$$

になる（有限集合 X の要素数（サイズ）を $|X|$ で表記する）．

ここで次のような二部グラフ B を考える．頂点集合は $W \cup L$ であり，$w \in W$ と $\ell \in L$ の間に辺が引かれ

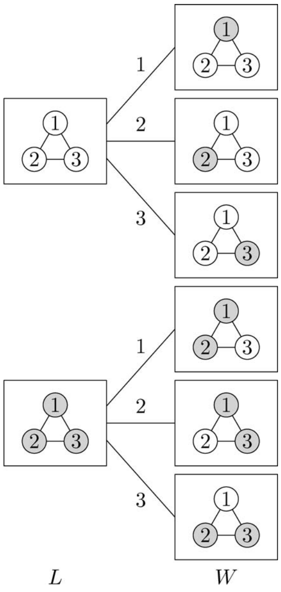

図 8　K_3 に対する盲目委任戦略

るのは，w と ℓ の中で 1 人の囚人の帽子の色しか違わないときである．また，その囚人の名前をその辺のラベルとする．

図 8 では，K_3 に対して盲目委任戦略を考えた場合に，二部グラフ B を描いてみた．赤をかぶせられた囚人を白丸，青をかぶせられた囚人を灰丸で表している．

行いたいことは，この二部グラフ B の辺集合のサイズを二重に数え上げることである．

まず，W の側から数えてみる．任意の $w \in W$ を考えると，w という帽子のかぶせ方において，正しい宣言をした囚人が 1 人はいる．その囚人を i とする．かぶせ方 w において囚人 i は i 以外の囚人にかぶせられた帽子の色を見て正しい宣言をしているが，もし i にかぶせられた帽子の色が w におけるものと異なれば，i の宣言は誤りとなる．すなわち，w と辺で結ばれた L の頂点が 1 つは存在する．ここまでをまとめると，任意の頂点 $w \in W$ の次数は 1 以上である，ということになり，B の辺集合のサイズは $|W|$ 以上ということになる．

一方，B の辺集合のサイズを L の側から数えてみる．任意の $\ell \in L$ を考えると，ℓ という帽子のかぶせ方において，誤った宣言をした囚人が 1 人はいる．いま，ℓ において誤った宣言をした囚人全員から成る集合を T とする．また T の部分集合 $T' \subseteq T$ を，囚人 i で，ℓ において i にかぶせられた帽子の色が変わった場合に囚人が勝利するようなもの全員から成る集合とする．

ここで，T' における任意の 2 囚人 i, j は G において隣接していることを背理法によって示す．では，i, j が G において隣接していないと仮定する．このとき，ℓ において i にかぶせられた帽子の色が変わると囚人は勝利しなくてはいけないが，囚人 j からは i の帽子の色が ℓ における場合と異なることは見えない．つまり，i にかぶせられた帽子の色が変わっても，j は誤った宣言をしてしまうことになる．これは囚人が勝利することに矛盾する．

一般に，グラフ G のクリークとは，互いに隣接する頂点から成る集合のことである．クリークの最大サイズのことを G のクリーク数と呼び，$\omega(G)$ と表記する．いま証明したことは，B における各 $\ell \in L$ の次数が $\omega(G)$ 以下であるということである．したがって，B の辺集合のサイズは $\omega(G)|L|$ 以下ということになる．

これで二重の数え上げが終わり，結論として，

$$|W| \leq \omega(G)|L|$$

が得られる．ゆえに，勝利確率は

$$\frac{|W|}{|W|+|L|+|N|} \leq \frac{|W|}{|W|+|L|} \leq \frac{|W|}{|W|+\frac{1}{\omega(G)}|W|}$$

となり，つまり，

$$h(G) \leq \frac{\omega(G)}{\omega(G)+1}$$

という上界が得られる．

例えば，$G = K_3$ のとき，$\omega(G) = 3$ なので，$h(G) \leq 3/4$ という上界が得られ，先ほどの下界と合わせて $h(G) = 3/4$ という等式が得られる．同様に，グラフ H に対しても $\omega(H) = 3$ となるので，$h(H) = 3/4$ が得られる．

Feige [4] は任意のグラフ G に対して

$$h(G) = h(K_{\omega(G)})$$

となることを予想した．これは未解決であり，実は $\omega(G) = 2$ の場合に限っても未解決である．Feige [4] は G が二部グラフの場合にこの予想が正しいことを証明している．

文献案内

各囚人から自分以外のすべての囚人の帽子の色が見えるという元のバージョンの帽子パズルの初出は Ebert の博士論文 [2] のようであり，その該当部分はジャーナルに出版されている [3]．彼が帽子ゲームを考えた動機はランダム列の自己還元性に関する研究にあったようである．囚人数が 3 のときに勝利確率を 3/4 とする戦略を紹介したが，これは誤り訂正符号と深く関わっ

ていることが知られていて，一般の囚人数に対して拡張できる．詳細については Lenstra and Seroussi [6] を参照のこと．

帽子ゲームをグラフへ一般化したのは Krzywkowski [5] である．ここで紹介した内容は Feige [4] に従った．本稿では赤と青の 2 色しか考えなかったが，一般に q 色の帽子を考えたり，無向グラフではなく有向グラフを考えるバージョンも研究されている．また，宣言しないことを許さず，すべての囚人が宣言しなくてはならないバージョンもあり，その場合は正答数を最大にするような戦略が何なのかを探究している．

参考文献

[1] P. Csorba, C. A. J. Hurkens, and G. J. Woeginger, The Alcuin number of a graph and its conncetions to the vertex cover number, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **24**, 757–769, 2010 (Also in SIAM Review, **54**, 141–154, 2012).

[2] T. Ebert, Applications of recursive operators to randomness and complexity, Ph.D. Thesis, University of California at Santa Barbara, Santa Barbara, U.S.A., 1998.

[3] T. Ebert, W. Merkle, and H. Vollmer, On the autoreducibility of random sequences, *SIAM Journal on Computing*, **32**, 1542–1569, 2003.

[4] U. Feige, On optimal strategies for a hat game on graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **24**, 782–791, 2010.

[5] M. Krzywkowski, Hat problem on a graph, *Mathematica Pannonica*, **21**, 3–21, 2010.

[6] H. W. Lenstra, and Jr., G. Seroussi, On hats and other covers, *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*, 2002.

[7] 三浦伸夫，＜翻訳＞最古のラテン語数学問題集：アルクイン『青年達を鍛えるための諸命題』の翻訳と注解．国際文化学研究：神戸大学国際文化学部紀要， **8**, 157–196 1997.

[8] P. Winkler, Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection, A K Peters, 2003. （日本語訳：ピーター・ウィンクラー（著），坂井公，岩沢宏和，小副川健（訳），『とっておきの数学パズル』，日本評論社，2011.）

