

最短距離 DEA の単調性に関する検証

安藤 和敏, 金満 達也, 前田 恭伸, 関谷 和之

1. はじめに

Data Envelopment Analysis (DEA) [11] は組織活動の効率性を分析する手法である。DEA では各組織の活動を入力から出力への変換過程とみなし、その変換効率をその組織活動の効率値もしくは非効率値として与える。さらに、DEA はその組織に対する改善目標も提供する。DEA においては現在までにさまざまな観点から (非) 効率値のモデル化が行われているが、(非) 効率値を距離としてとらえた距離最小化の原理によるモデル [5,7] が近年盛んに研究されている。こうした研究動向の背景には、距離最小化の原理によって与えられる改善目標の受け入れやすさと高度な計算技術を実装した最適化ソフトウェアの普及がある。その一方で、距離最小化原理によって与えられる効率値は、効率性尺度が満足すべき基本的性質の 1 つである単調性を満たさないことが Pastor ら [8] と Ando ら [2] によって明らかにされた。

Pastor ら [8] と Ando ら [2] は、距離最小化原理によって与えられる効率値が単調性を満たさないことを反例によって示した。これらの反例は人為的に作成した数値例であって、実データではない。そこで本研究では、距離最小化原理に基づく既存研究で利用された実データを用いて、単調性がどの程度破れているかを検証する。さらに、2 入力 1 出力のデータに対する距離における単調性保証に関する解析結果を報告する。この解析結果から、2 入力 1 出力のデータでは、単調性の成否が単純に判定できることがわかる。また、単位不変性は距離を扱ううえで注意すべき性質であるが、距離最小化原理による DEA は、データの正規化を適切に行うことによって、単位不変性だけでなく単調性も保証できることを紹介する。

2. 距離最小化原理と単調性

DEA では、 n 個の組織のそれぞれが m 個の入力を用いて s 個の出力を産出する活動をするものとする。このとき、 j 番目の組織を DMU_j と書き、その m 個からなる入力ベクトルを $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})^T$ 、その s 個からなる出力ベクトルを $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})^T$ と書く。効率測定対象の組織を DMU_k とすると、その非効率値を $f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ と書く。DEA では、いくつかの生産上の仮定を置き、組織が活動可能な入出力の集合を生産可能集合 T として想定する。生産可能集合 T に対して、 $\partial(T)$ を

$$\left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T \mid \begin{array}{l} (\mathbf{x}', -\mathbf{y}') \leq (\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \\ (\mathbf{x}', -\mathbf{y}') \neq (\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \end{array} \Rightarrow (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \notin T \right\} \quad (1)$$

によって定義し、これを効率的フロンティアと呼ぶ。

距離最小化原理による DEA は (\mathbf{x}, \mathbf{y}) から $\partial(T)$ までの最小距離を (\mathbf{x}, \mathbf{y}) の非効率値として与える。つまり、

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min \{ \|(\mathbf{x}', \mathbf{y}') - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \mid (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in \partial(T) \} \quad (2)$$

である。ここで、 $\|\cdot\|$ はノルムを示す。 $(\mathbf{x}', -\mathbf{y}') \leq (\mathbf{x}, -\mathbf{y})$ を (2) の制約に追加する距離最小化原理によるモデル化 [4] もある。

DEA では非効率性尺度に対する望ましい性質 [10] が議論されているが、そのうちの 1 つに単調性がある。それは、「優れた活動をした組織の非効率値は劣った活動の非効率値以下である」ことを要求し、以下の式で与えられる。

$$(\bar{\mathbf{x}}, -\bar{\mathbf{y}}) \geq (\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \Rightarrow f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3)$$

$f(\cdot)$ が式 (2) によって与えられたとき、単調性 (3) は任意の $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T$ に対して $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と最小化問題

$$\min \left\{ \|(\mathbf{x}', \mathbf{y}') - (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})\| \mid \begin{array}{l} (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in \partial(T), \\ (\bar{\mathbf{x}}, -\bar{\mathbf{y}}) \geq (\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \end{array} \right\} \quad (4)$$

の最小値が一致することである。

あんどう かずとし, かねみつ たつや, まえだ やすのぶ,
せきたに かずゆき
静岡大学大学院工学研究科
〒 432-8561 浜松市中区城北 3-5-1
連絡先: 関谷 和之 (E-mail: sekitani@sys.eng.shizuoka.ac.jp)
受付 13.6.18 採択 13.9.30

3. 実データによる単調性の検証

効率性尺度 f が T 上で単調でないことを判定するには、ある $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T$ が存在して「 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) >$ (4) の最小値」を満たすことを示せばよい。つまり、効率性尺度 f の T 上で単調性の判定には、任意の $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T$ に対して $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と (4) の最小値を比較することが必要である。しかし、 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T$ は無数に存在するので、単調性の判定は計算上困難である。DEA では $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \notin \partial(T)$ である DMU $_j$ の非効率値を測定することが分析目的である。少なくとも、 $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \notin \partial(T)$ である DMU $_j$ に対して「 $f(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) >$ (4) の最小値」であれば、その DEA での分析結果は信頼に値しないであろう。そこで、本節は既存研究で利用された実データ [1,3,4] を用いて、 $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \notin \partial(T)$ である DMU $_j$ に対して $f(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ と (4) の最小値を比較し、単調性の破綻を検証する。

本検証で取り上げる実データは Aparicio ら [3] が用いた航空会社 28 社の 4 入力 2 出力のデータ、天達ら [1] が用いた化学会社 40 社の 2 入力 2 出力のデータ、Baek ら [4] が用いた 2 入力 2 出力の 14 の病院データとする。航空会社のデータは Ray [9] から、病院データは刀根 [11] からの出典である。本検証で取り上げる距離最小化原理による DEA モデルの 1 つは距離を L_1 ノルムとし、生産可能集合 T を規模の収穫一定を仮定した以下の T^c とする。

$$T^c = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \leq \mathbf{x}, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j \geq \mathbf{y}, \\ \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{array} \right. \right\}.$$

3 種類のデータそれぞれで生成される T^c の情報を表 1 に与える。表 1 の内の数字はそれぞれの出典に与えられた DMU 番号である。航空会社以外の 2 種類のデータでは生産可能集合の facet である極大な効率的面が存在するが、航空会社のデータではどの極大な効率的面も facet でない。航空会社全 28 社の中で非効率な会社は 19 社、化学会社 40 社中で非効率なものは 36 社、14 病院で非効率なものは 9 病院であった。

航空会社では非効率な DMU 19 個に対して、化学会社では非効率な DMU 36 個に対して、病院では非効率な DMU 9 個に対して、 $f(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ と (4) の最小値を比較した結果のそれぞれを表 2, 3, 4 に与える。なお、これらの 3 つの表ではスペースの都合上、 f が (4) の最小値より大きい DMU に限定し、それらの分析結果を報告する。つまり、単調性の破綻の証拠が表 2, 3, 4 に与えられている。表 5 は 3 つの実データにおける

表 1 各 T^c の効率的 DMU と極大な効率的面

| | 航空会社 | 化学会社 | 病院 |
|--------------------|---|---|---|
| 効率的 DMU | | | |
| 個数 | 9 | 4 | 5 |
| 内訳 | 4,6,7,8,11,13,15,16,18 | 3,14,28,38 | 2,3,6,8,10 |
| 極大な効率的面を構成する DMU 群 | | | |
| 個数 | 10 | 2 | 3 |
| 内訳 | {6,7,16} {4,8,11,15} {4,8,13,15} {6,7,8,18} {7,8,11,18} | {4,7,8,11} {3,28,38} {4,8,11,18} {14,28,38} {6,7,8,13} {6,8,16,18} | {6,8} {2,6,10} {3,6,10} {8,11,15,18} |

表 2 航空会社での f と (4) の最小値の比較

| DMU | $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ | (4) の最小値 | 差 |
|-----|-----------------------------|----------|----------|
| 1 | 2109.410 | 763.477 | 1345.933 |
| 2 | 369.158 | 143.169 | 225.989 |
| 3 | 2673.590 | 2318.950 | 354.640 |
| 5 | 530.668 | 297.889 | 232.779 |
| 9 | 526.833 | 371.093 | 155.740 |
| 10 | 1170.660 | 393.677 | 776.983 |
| 12 | 3370.760 | 432.389 | 2938.371 |
| 14 | 565.389 | 98.021 | 467.367 |
| 17 | 281.089 | 231.492 | 49.597 |
| 19 | 1046.320 | 678.555 | 367.765 |
| 20 | 229.714 | 166.609 | 63.105 |
| 21 | 1327.980 | 534.440 | 793.540 |
| 22 | 1308.000 | 1059.270 | 248.730 |
| 23 | 803.741 | 715.810 | 87.931 |
| 24 | 1012.830 | 525.954 | 486.876 |
| 25 | 361.325 | 137.031 | 224.294 |
| 26 | 429.123 | 200.034 | 229.089 |
| 27 | 1721.680 | 938.019 | 783.661 |
| 28 | 2745.830 | 1637.330 | 1108.500 |

表 3 化学会社での f と (4) の最小値の比較

| DMU | $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ | (4) の最小値 | 差 |
|-----|-----------------------------|----------|--------|
| 9 | 14923.6 | 11788.2 | 3135.4 |
| 11 | 26593.6 | 19497.1 | 7096.5 |

単調性の破綻の証拠となる DMU の個数の要約である。表 5 から、3 種類の実データいずれでも、生産可能集合 T^c 下での L_1 距離最小化原理の DEA では単調性が破綻していることが確認できる。

Aparicio ら [3]、天達ら [1]、Baek ら [4] それぞれが開発した距離最小化原理の既存 DEA モデルでは L_1 以外のノルムが導入されており、また、生産可能集合も規模の収穫可変性が仮定されており、 T^c に限らない。

表 4 病院での f と (4) の最小値の比較

| DMU | $f(x, y)$ | (4) の最小値 | 差 |
|-----|-----------|----------|----------|
| 1 | 2129.03 | 1011.61 | 1117.42 |
| 4 | 30834.60 | 14045.60 | 16789.00 |
| 5 | 6136.76 | 3511.01 | 2625.75 |
| 7 | 20964.40 | 6317.96 | 14646.44 |
| 11 | 1179.46 | 539.58 | 639.87 |
| 12 | 33699.10 | 1240.61 | 32458.49 |
| 13 | 73429.40 | 25555.00 | 47874.40 |
| 14 | 51723.80 | 10525.90 | 41197.90 |

表 5 3 種類の実データでの単調性の破綻

| データ | 非効率 DMU | 破綻を示す DMU |
|------|---------|-----------|
| 航空会社 | 19 個 | 19 個 |
| 化学会社 | 36 個 | 2 個 |
| 病院 | 9 個 | 8 個 |

そこで、既存研究で紹介されていた距離最小化原理の DEA モデルでも、単調性の破綻が非効率 DMU で観測されるかどうかを検証する。

Aparicio ら [3] は生産可能集合 T^c 下で距離最小化原理による SBM モデル [12]

$$\max \left\{ \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ik} - x'_i}{x_{ik}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y'_r - y_{rk}}{y_{rk}}} \mid \begin{array}{l} (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in \partial(T^c), \\ (\mathbf{x}', -\mathbf{y}') \leq (\mathbf{x}_k, -\mathbf{y}_k) \end{array} \right\} \quad (5)$$

を提案し、航空会社のデータを分析した。天達ら [1] と Baek ら [4] は規模の収穫可変性を仮定した生産可能集合

$$T^v = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \lambda_j \leq \mathbf{x}, \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \lambda_j \geq \mathbf{y}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{array} \right\}$$

に対して距離最小化原理を適用した DEA モデルを提案した。天達ら [1] は距離最小化原理による加法モデル

$$\min \sum_{i=1}^m (x_{ik} - x'_i) + \sum_{r=1}^s (y'_r - y_{rk}) \quad (6)$$

$$\text{s.t. } (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in \partial(T^v), (\mathbf{x}', -\mathbf{y}') \leq (\mathbf{x}_k, -\mathbf{y}_k) \quad (7)$$

を化学会社の分析に適用した。Baek ら [4] は $\gamma_i^x = \max_{j=1, \dots, n} x_{ij} - \min_{j=1, \dots, n} x_{ij}$ ($i = 1, \dots, m$) $\gamma_r^y = \max_{j=1, \dots, n} y_{rj} - \min_{j=1, \dots, n} y_{rj}$ ($r = 1, \dots, s$) を定義し、 L_2 ノルム距離最小化原理による RAM モデル

$$\min \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_{ik} - x'_i}{\gamma_i^x} \right)^2 + \sum_{r=1}^s \left(\frac{y'_r - y_{rk}}{\gamma_r^y} \right)^2 \quad (8)$$

$$\text{s.t. } (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in \partial(T^v) \quad (9)$$

表 6 各 T^v の効率的 DMU と極大な効率的面

| 化学会社 | | 病院 |
|--------------------|---|--|
| 効率的 DMU | | |
| 個数 | 9 | 8 |
| 内訳 | 1,3,4,5,14, 28,33,36,38 | 1,2,3,6, 8,10,12,14 |
| 極大な効率的面を構成する DMU 群 | | |
| 個数 | 6 | 6 |
| 内訳 | {28,36,38} {1,3,5,33} {3,14,28,38} {1,3,4,33} {3,4,14,33} {3,14,33,38} | {1,3,8} {3,6,8} {6,10,12} {10,12,14} {1,2,3,6} {2,3,6,10} |

を提案し、病院データを分析した。化学会社と病院のデータで生成される T^v の情報を表 6 に与える。 T^c から T^v に変更することで、化学会社では全 40 社中で非効率なものは 31 社、病院では全 14 病院の中で非効率なものは 6 病院に減少した。

化学会社と病院のデータのそれぞれにおける非効率な DMU_k に対して、DEA モデル (6-7) と (8-9) をそれぞれ適用して得た非効率値 f 、さらに、これら 2 つの DEA モデルそれぞれに応じた最小化問題 (4) の最適値を計算した。化学会社と病院のデータに対する非効率値 f と最小化問題 (4) の最適値を表 8, 9 に与える。

距離最小化原理による SBM モデル (5) における単調性の破綻を非効率 DMU で検証するには、(5) は最大化問題であることと (5) の目的関数の分母と分子のそれぞれに観測値 $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ を含むことから注意が必要である。ここでは、まず、非効率な DMU_k に対して

$$\max \left\{ \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_i - x'_i}{\bar{x}_i}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y'_r - \bar{y}_k}{y_{rk}}} \mid \begin{array}{l} (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \in \partial(T^c), \\ (\mathbf{x}', -\mathbf{y}') \leq (\bar{\mathbf{x}}, -\bar{\mathbf{y}}), \\ (\mathbf{x}_k, -\mathbf{y}_k) \leq (\bar{\mathbf{x}}, -\bar{\mathbf{y}}) \end{array} \right\} \quad (10)$$

の最適解を $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$ とする。そして、

$$\frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_i^* - x'_i}{\bar{x}_i^*}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{y'_r - \bar{y}_k^*}{y_{rk}^*}} \quad (11)$$

を計算する。式 (11) の値が (5) の最大値より大きければ、「 $(\mathbf{x}_k, -\mathbf{y}_k) \leq (\bar{\mathbf{x}}^*, -\bar{\mathbf{y}}^*)$ であるが $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ の効率値は $(\bar{\mathbf{x}}^*, \bar{\mathbf{y}}^*)$ の効率値より悪い」ことが成立する。したがって、これは距離最小化原理による SBM モデル (5) は T^c 上で単調性が破綻した証拠となる。表 7 には、距離最小化原理による SBM モデルを航空会社

表7 航空会社での (5) と (11) の比較

| DMU | (5) | (11) | 差 |
|-----|-------|-------|-------|
| 1 | 0.399 | 0.834 | 0.434 |
| 2 | 0.932 | 0.939 | 0.007 |
| 3 | 0.768 | 0.769 | 0.001 |
| 5 | 0.835 | 0.870 | 0.034 |
| 10 | 0.884 | 0.924 | 0.040 |
| 12 | 0.832 | 0.893 | 0.061 |
| 14 | 0.877 | 0.935 | 0.058 |
| 19 | 0.845 | 0.957 | 0.112 |
| 20 | 0.922 | 0.929 | 0.008 |
| 21 | 0.647 | 0.942 | 0.295 |
| 22 | 0.891 | 0.907 | 0.015 |
| 24 | 0.864 | 0.950 | 0.086 |
| 25 | 0.913 | 0.976 | 0.063 |
| 26 | 0.873 | 0.977 | 0.104 |
| 27 | 0.810 | 0.960 | 0.150 |

表8 化学会社での f と (4) の最小値の比較

| DMU | $f(x, y)$ | (4) の最小値 | 差 |
|-----|-----------|----------|---------|
| 2 | 312228.0 | 267470.0 | 44758.0 |
| 9 | 29443.1 | 29029.5 | 413.6 |
| 15 | 144852.0 | 94210.4 | 50641.6 |
| 26 | 117511.0 | 112477.0 | 5034.0 |
| 35 | 68986.4 | 40687.8 | 28298.6 |
| 39 | 61224.8 | 32405.5 | 28819.3 |

表9 病院での f と (4) の最小値の比較

| DMU | $f(x, y)$ | (4) の最小値 | 差 |
|-----|-----------|----------|--------|
| 7 | 0.0098 | 0.0093 | 0.0005 |

表10 3種類の実データでの単調性の破綻

| データ | 非効率 DMU | 破綻を示す DMU |
|------|---------|-----------|
| 航空会社 | 19 個 | 15 個 |
| 化学会社 | 31 個 | 6 個 |
| 病院 | 6 個 | 1 個 |

のデータに適用した結果である (5) と (11) の値を与えた。表 10 は 3 つの実データにおける単調性の破綻の証拠となる DMU の個数の要約である。3 種類の実データいずれでも、それぞれの論文で提案されている距離最小化原理の DEA において、それらの単調性が破綻していることが非効率 DMU を分析することでわかった。

4. 2 入力 1 出力による規模の収穫一定の生産可能集合上の単調性

2 つの表 5 と表 10 から、3 種類の実データいずれでもモデルを (2) から変更しても単調性の破綻を示す非効率 DMU が存在することがわかった。Ando ら [2] は、(2) において L_p ノルムの取り方と生産可能集合 T^c 、 T^v の選び方に依存せずに単調性の破綻が生じることを反例で示した。具体的には、 T^c に対して 3 入力 2 出力の数値例、 T^v では 2 入力 1 出力の数値例で示した。

この事実と前節までの数値実験の結果から、距離最小化原理による DEA では常に単調性が破綻し、単調性を満たすデータは存在しないかもしれないという不安がよぎる。距離最小化原理による非効率性尺度が単調性を満たすデータは存在しないのであろうか？そこで、本節では、2 入力 1 出力の生産可能集合 T^c の下での L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) が単調性を保証するための必要十分条件を示す。この事実は L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) の適用可能性を明らかにする。さらに、単位不変性を目的とした適切な正規化をデータに施すことで、いかなる 2 入力 1 出力データに対しても距離最小化原理による非効率性尺度 (2) は単調性を常に保証することが導かれる。

まず、2 入力 1 出力の生産可能集合 T^c の下での L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) が単調性を保証するための必要十分条件を与える。

定理 1. T^c を 2 入力 1 出力の生産可能集合とする。 $(x_1^L, x_2^L, y^L) = \arg \min \{x_1/y | (x_1, x_2, y) \in \partial(T^c)\}$ 、 $(x_1^R, x_2^R, y^R) = \arg \min \{x_2/y | (x_1, x_2, y) \in \partial(T^c)\}$ とする。非効率性尺度 (2) が T^c 上で単調であるための必要十分条件は $x_2^L \leq y^L$ かつ $x_1^R \leq y^R$ である。

T^c では $(x, y) \in \partial(T^c) \iff (x/y, 1) \in \partial(T^c)$ である。 $\|\cdot\|$ の正同次性から、 $yf(x/y, 1) = f(x, y)$ であり、 $(x/y, 1)$ に対する (4) の最小値の y 倍と (x, y) に対する (4) の最小値は一致する。したがって、定理 1 を次のように等価に書き直すことができる。

定理 2. T^c を 2 入力 1 出力の生産可能集合とする。 $(x_1^L, x_2^L, 1) = \arg \min \{x_1 | (x_1, x_2, 1) \in \partial(T^c)\}$ 、 $(x_1^R, x_2^R, 1) = \arg \min \{x_2 | (x_1, x_2, 1) \in \partial(T^c)\}$ とする。非効率性尺度 (2) が T^c 上で単調であるための必要十分条件は $x_2^L \leq 1$ かつ $x_1^R \leq 1$ である。

定理 2 は次の 3 つの補助定理をまとめたものである。

補助定理 1. 定理 2 の $(x_1^L, x_2^L, 1)$ と $(x_1^R, x_2^R, 1)$ を考える。 $x_2^L x_1 \geq x_1^L x_2$ かつ $x_2^R x_1 \leq x_1^R x_2$ を満たす任意の $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致する。

補助定理 2. 定理 2 の $(x_1^L, x_2^L, 1)$ を考える。 $x_2^L \leq 1$ であれば、 $x_2^L x_1 < x_1^L x_2$ を満たす任意の $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致する。 一方、 $x_2^L > 1$ であれば、 $x_2^L x_1 < x_1^L x_2$ を満たす任意の $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致しない。

補助定理 3. 定理 2 の $(x_1^R, x_2^R, 1)$ を考える。 $x_1^R \leq 1$ であれば、 $x_2^R x_1 > x_1^R x_2$ を満たす任意の $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致する。 一方、 $x_1^R > 1$ であれば、 $x_2^R x_1 > x_1^R x_2$ を満たす任意の $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致しない。

付録で上記 3 つの補助定理の証明を行う。

定理を含む 4 つの命題の主張を次のような 2 入力 1 出力の生産可能集合 T^c で図解する。 T^c の効率的フロンティア $\partial(T^c)$ には 3 つの活動 $DMU_A = (7, 3, 1)$, $DMU_B = (2, 6, 1)$, $DMU_C = (3, 4, 1)$ が存在し、 $\partial(T^c) = \{(7, 3, 1)\lambda_A + (3, 4, 1)\lambda_C \mid \lambda_A \geq 0, \lambda_C \geq 0\} \cup \{(2, 6, 1)\lambda_B + (3, 4, 1)\lambda_C \mid \lambda_B \geq 0, \lambda_C \geq 0\}$ である。 この T^c と平面 $y = 1$ との切断面を図 1 に与える。 この数値例では定理 2 の (x_1^L, x_2^L) は $(2, 6)$, (x_1^R, x_2^R) は $(7, 3)$ であり、それぞれは DMU_B と DMU_A に相当する。 補助定理 2 で注目した $x_2^L x_1 < x_1^L x_2$ かつ $(x_1, x_2, 1) \in T^c$ を満たす (x_1, x_2) の集合は領域 1 である。 補助定理 3 で注目した $x_2^R x_1 > x_1^R x_2$ かつ $(x_1, x_2, 1) \in T^c$ を満たす (x_1, x_2) の集合は領域 2 である。 さらに、補助定理 1 で注目した $x_2^L x_1 \geq x_1^L x_2$ かつ $x_2^R x_1 \leq x_1^R x_2$ を満たす $(x_1, x_2, 1) \in T^c$ の (x_1, x_2) の集合は領域 3 である。

補助定理 1 の意味することは、 $(x_1/y, x_2/y)$ が領域 3 に含まれる任意の活動 $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致することである。 つまり、 L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) は $\{(x_1, x_2, y) \in T^c \mid (x_1/y, x_2/y) \text{ は領域 3 にある}\}$ 上で単調である。

補助定理 2 の意味することは、領域 1 では、 x_2^L の値に依存して、その領域に含まれる $(x_1/y, x_2/y)$ の活動 (x_1, x_2, y) に対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致するかどうかが決まることである。 $x_2^L \leq 1$ であるとき、 $(x_1/y, x_2/y)$ が領域 1 に属すならば活動

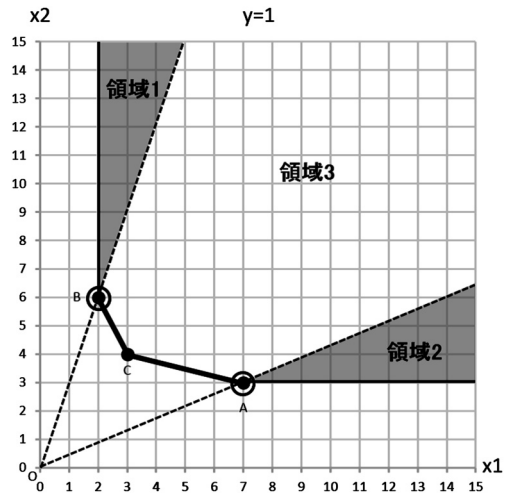


図 1 定理 2, 補助定理 1~3 の説明図

$(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致する。 一方、 $x_2^L > 1$ であるとき、 $(x_1/y, x_2/y)$ が領域 1 に含まれる活動 $(x_1, x_2, y) \in T^c$ すべてに対して $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値は一致しない。 これは、 $(x_1/y, x_2/y)$ が領域 1 に含まれる任意の活動 $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して、 $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値が一致するための必要十分条件が $x_2^L \leq 1$ であることを意味する。 同様に、 $(x_1/y, x_2/y)$ が領域 2 に含まれる任意の活動 $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して、 $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値が一致するための必要十分条件が $x_1^R \leq 1$ であることを補助定理 3 は意味する。

補助定理 1 から、 $(x_1/y, x_2/y)$ が領域 3 に属する任意の活動 $(x_1, x_2, y) \in T^c$ に対して、無条件に $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値が一致する。 一方、補助定理 2 と 3 で導いた $f(x_1, x_2, y)$ と (4) の最小値が一致するための必要十分条件から、 L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) が T^c 上で単調であるための必要十分条件は $x_2^L \leq 1$ かつ $x_1^R \leq 1$ であることを定理 2 に示した。

本数値例では $x_2^L = 6$, $x_1^R = 7$ であることから、 L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) が T^c 上で単調でないことが定理 2 からわかる。 データの x_1 と x_2 の値をすべて $1/10$ 倍すると、 $x_2^L = 6/10$, $x_1^R = 7/10$ であるので、入力値を $1/10$ 倍した生産可能集合 T^c 上で L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) は単調である。 つまり、データに適当な正規化を施し、正規化されたデータから生産可能集合 T^c を生成すれば、「 T^c 上で L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) は単調である」ことを実現できる。 データ正規化を適切に行えば、効率性尺度が単位不変性を満たす。 効率性尺

度の単位不変性とは入出力項目のデータの単位の取り方に（非）効率値が依存しないことである。データ正規化に注目すると、定理 2 から以下のことが成立する。

系 1. 2 入力項目ごとでのデータの最大値を $x_{1\max}^1 = \max\{x_{1j}|j = 1, \dots, n\}$, $x_{2\max}^2 = \max\{x_{2j}|j = 1, \dots, n\}$ 出力項目でのデータの最小値を $y_{\min} = \min\{y_j|j = 1, \dots, n\}$ とし、これらで正規化したデータの値を $\hat{x}_{ij} = x_{ij}/x_{i\max}^i$ ($i = 1, 2, j = 1, \dots, n$), $\hat{y}_j = y_j/y_{\min}$ ($j = 1, \dots, n$) とする. $(\hat{x}_{1j}, \hat{x}_{2j}, \hat{y}_j)$ ($j = 1, \dots, n$) で生成した生産可能集合 \hat{T}^c 上で L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) は単調である. さらに, L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) は単位不変である.

正規化したデータによる生産可能集合 \hat{T}^c を用いずに系 1 の主張は表現できる.

系 2. 2 入力項目ごとでのデータの最大値を $x_{1\max}^1 = \max\{x_{1j}|j = 1, \dots, n\}$, $x_{2\max}^2 = \max\{x_{2j}|j = 1, \dots, n\}$, 出力項目でのデータの最小値を $y_{\min} = \min\{y_j|j = 1, \dots, n\}$ とする. このとき,

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{|x'_i - x_i|}{x_{i\max}^i} + \frac{|y' - y|}{y_{\min}} \mid (x'_1, x'_2, y') \in \partial(T^c) \right\} \quad (12)$$

は生産可能集合 T^c 上で単調であり, 単位不変である.

5. 実データを用いた単調性判定の例

本節では定理 2 で与えた単調性の特徴付けによる判定を Chandra ら [6] が事例研究で用いた 2 入力 1 出力のデータに対して適用し, その判定例を紹介する. この DEA の事例研究 [6] では, 労働者数と資本金を入力として選択し, 売上高を出力として選択し, カナダの織物会社 29 社を規模の収穫一定を仮定した生産可能集合 T^c で分析した. その 2 入力 1 出力のデータと入力 1/出力の比, 入力 2/出力の比を表 11 に与える.

表 11 の第 5 列で最小値は 0.088 であり, DMU_{14} でのみ達成される. したがって, DMU_{14} は効率的であり, $(x_{1,14}, x_{2,14}, y_{14}) = (15, 67, 170) \in \partial(T^c)$ である. さらに, $(x_{1,14}/y_{14}, x_{2,14}/y_{14})$ は定理 2 の (x_1^L, x_2^L) である. $x_{2,14}/y_{14} = 0.394 \leq 1$ なので, 定理 2 の $x_2^L \leq 1$ を満たす. 表 11 の第 6 列で最小値は 0.040 であり, DMU_4 でのみ達成される. したがって, DMU_4 は効率的であり, $(x_{1,4}, x_{2,4}, y_4) = (200, 6, 150) \in \partial(T^c)$ である. さらに, $(x_{1,4}/y_4, x_{2,4}/y_4)$ は定理 2 の (x_1^R, x_2^R)

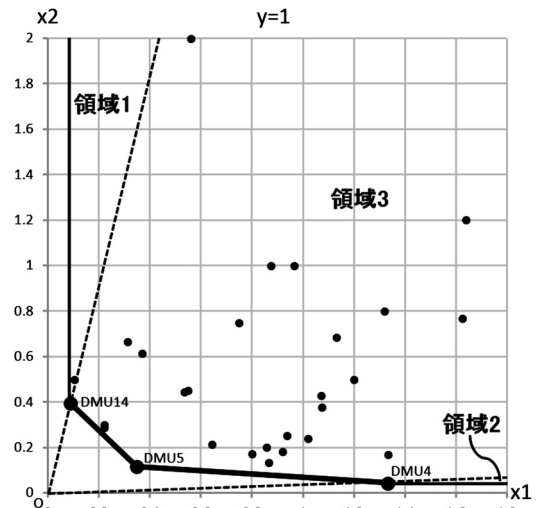


図 2 織物会社 29 社の入力 1/出力と入力 2/出力

である. $x_{1,4}/y_4 = 1.333 > 1$ なので, 補助定理 3 の $x_1^R \leq 1$ を満たさない. つまり, 表 11 で与えた 2 入力 1 出力のデータにおいて, L_1 距離最小化原理による非効率性尺度 (2) は T^c 上で単調でない.

表 11 の入力 1/出力と入力 2/出力のデータをプロットしたものが図 2 である. この図 2 から効率的な DMU は $DMU_{4,5,14}$ であり, これら以外の 26 個の DMU は非効率である. どの非効率な DMU も領域 1 と 3 に属し, 領域 2 には非効率な DMU が存在しない. 補助定理 1 から領域 3 に属する DMU_k は常に $f(x_k, y_k)$ と (4) の最小値が一致する. また, $x_2^L = x_{2,14}/y_{14} = 0.394 \leq 1$ なので, 領域 1 に属する非効率な DMU_k もまた常に $f(x_k, y_k)$ と (4) の最小値が一致する. そのため, 非効率 DMU 26 個すべてに対して $f(x_k, y_k)$ と (4) の最小値が一致する. したがって, 非効率 DMU 26 個すべてに対する $f(x_k, y_k)$ と (4) の最小値の大小比較しても単調性の破綻を示す非効率 DMU は発見できない. これは, 非効率 DMU_k に対する $f(x_k, y_k)$ と (4) の最小値の大小比較では, 単調性の判定として不十分であることを示す.

定理 2 で与えた単調性の特徴付けによる判定は正確なだけでなく, その計算も簡単である. 2 種類の比, 入力 1/出力の比, 入力 2/出力の比を全 DMU で計算し, 各種類で最小値を達成する DMU を発見し, x_2^L と x_1^R が 1 以下であることを判定すればよい. 何らかの最適化計算も必要とせず, 描画作業も必要としない.

6. おわりに

本研究では, 単調性を任意の $(x, y) \in T$ に対する

表 11 織物会社の労働者数、資本金と売上高

| DMU | 入力 1 | 入力 2 | 出力 | 入力 1 | 入力 2 | DMU | 入力 1 | 入力 2 | 出力 | 入力 1 | 入力 2 |
|-----|------|------|-------|--------------|--------------|-----|------|------|-------|-------|-------|
| | 労働者数 | 資本金 | 売上高 | 出力 | 出力 | | 労働者数 | 資本金 | 売上高 | 出力 | 出力 |
| 1 | 35 | 40 | 40 | 0.875 | 1.000 | 15 | 4 | 0.85 | 5 | 0.800 | 0.170 |
| 2 | 103 | 500 | 1000 | 0.103 | 0.500 | 16 | 3 | 1.2 | 2.8 | 1.071 | 0.429 |
| 3 | 75 | 20 | 80 | 0.938 | 0.250 | 17 | 12 | 5 | 10 | 1.200 | 0.500 |
| 4 | 200 | 6 | 150 | 1.333 | <u>0.040</u> | 18 | 8 | 1 | 6 | 1.333 | 0.167 |
| 5 | 61 | 20 | 175 | 0.349 | 0.114 | 19 | 129 | 45 | 120 | 1.075 | 0.375 |
| 6 | 150 | 71 | 92.35 | 1.624 | 0.769 | 20 | 99 | 60 | 87.5 | 1.131 | 0.686 |
| 7 | 31 | 40 | 140 | 0.221 | 0.286 | 21 | 52 | 8 | 60 | 0.867 | 0.133 |
| 8 | 72 | 60 | 135 | 0.533 | 0.444 | 22 | 90 | 30 | 140 | 0.643 | 0.214 |
| 9 | 56 | 120 | 180 | 0.311 | 0.667 | 23 | 132 | 80 | 100 | 1.320 | 0.800 |
| 10 | 110 | 150 | 500 | 0.220 | 0.300 | 24 | 191 | 45 | 187.5 | 1.019 | 0.240 |
| 11 | 165 | 135 | 300 | 0.550 | 0.450 | 25 | 92 | 18 | 100 | 0.920 | 0.180 |
| 12 | 56 | 200 | 100 | 0.560 | 2.000 | 26 | 150 | 35 | 175 | 0.857 | 0.200 |
| 13 | 48 | 80 | 130 | 0.369 | 0.615 | 27 | 41 | 30 | 25 | 1.640 | 1.200 |
| 14 | 15 | 67 | 170 | <u>0.088</u> | 0.394 | 28 | 15 | 15 | 20 | 0.750 | 0.750 |
| | | | | | | 29 | 29 | 30 | 30 | 0.967 | 1.000 |

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と (4) の最小値との大小比較として書き直した。非効率 DMU におけるこの大小比較を数値計算で検証することで、単調性の破綻を発見する方法を提案した。この方法は非効率 DMU をサンプリングされたデータとみなし、サンプリングデータ上で単調性の破綻を検証する方法である。DEA では、観測データである DMU の効率性に注目しているため、この検証法はある意味で実用的である。第 3 節では距離最小化原理の DEA の既存研究で用いられた実データに対して単調性の破綻を検証した。検証に用いた 3 つの実データでは単調性の破綻を示す非効率 DMU の存在が確認できた。

非効率 DMU に対する $f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ と (4) の最小値との大小比較を数値計算で検証し、単調性の破綻を発見する方法は単調性判定において十分でない。実際、第 4 節で取り上げた実データでは単調性の破綻を示す非効率 DMU は存在しなかったが、その単調性が破綻してしまうことは定理 1 から保証できた。2 入力 1 出力の規模の収穫一定の生産可能集合で L_1 距離最小化原理の DEA において、定理 1 は単調性の特徴付けを与える。その単調性の特徴付けは簡単な計算で単調性の破綻を発見できるので、実用上でも優れている。さらに、単位不変性をもたらすデータ正規化を組み込んだ DEA モデル (12) を提案し、単調性もまた保証できることを示した。

今後の研究としては、単調性の特徴付けを一般化さ

れた入出力項目数の上で、規模の収穫可変の生産可能集合の上で検討することがある。

謝辞 的確な御指摘により、本稿の質の向上に貢献して頂いた査読者の方々に深く感謝します。本研究の一部は科学研究費補助金基盤研究 (C)23510165 および (C)23510166 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] 天達洋文, 上田徹, 距離最短 DEA による化学会社の効率測定. オペレーションズ・リサーチ, **56** 341–351, 2011.
- [2] K. Ando, A. Kai, Y. Maeda, and K. Sekitani, “Least distance based inefficiency measures on the Pareto-efficient frontier in DEA,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **55** 73–91, 2012.
- [3] J. Aparicio, J. L. Ruiz and I. Sirvent, “Closest targets and minimum distance to the Pareto-efficient frontier in DEA,” *Journal of Productivity Analysis*, **28** 209–218, 2007.
- [4] C. Baek and J. Lee, “The relevance of DEA benchmarking information and the least-distance measure,” *Mathematical and Computer Modelling*, **49** 265–275, 2009.
- [5] W. Briec and H. Leleu, “Dual representations of non-parametric technologies and measurement of technical efficiency,” *Journal of Productivity Analysis*, **20** 71–96, 2003.
- [6] P. Charndra, W. W. Cooper, S. Li, and A. Rahman, “Using DEA to evaluate 29 Canadian textile companies—Considering returns to scale,” *International Journal of Production Economics*, **54** 129–141, 1998.
- [7] W. D. Cook and L. M. Seiford, “Data envelopment

analysis (DEA)—Thirty years on,” *European Journal of Operational Research*, **192** 1–17, 2009.

- [8] J. T. Pastor and J. Aparicio, “The relevance of DEA benchmarking information and the least-distance measure: comment,” *Mathematical and Computer Modelling*, **52** 397–399, 2010.
- [9] S. C. Ray, “*Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research*,” Cambridge University Press, 2004.
- [10] R. Russell and W. Schworm, “Axiomatic foundations of efficiency measurement on data-generated technologies,” *Journal of Productivity Analysis*, **31** 77–86, 2009.
- [11] 刀根薫, 『経営効率性の測定と改善—包絡分析法 DEA による』, 日科技連出版社, 1993.
- [12] K. Tone, “A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis,” *European Journal of Operational Research*, **130** 498–509, 2001.

付録

2 入力 \mathbf{x} に対して $(\mathbf{x}, y) \in \partial(T^c)$ を満たす y は存在すれば一意である。そこで, $(\mathbf{x}, y) \in \partial(T^c)$ を満たす y は $y = \eta(\mathbf{x})$ とする。 $\partial(T^c)$ の定義と T^c が多面体であることから, 以下が成立する。

1. $\eta(\cdot)$ は $\{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, y) \in \partial(T^c)\}$ 上で連続である。
2. $\eta(x_1, x_2)$ は x_1 に対して狭義単調増加である。
3. $\eta(x_1, x_2)$ は x_2 に対して狭義単調増加である。
4. $\eta(\cdot)$ は凹関数である。
5. $\{\mathbf{x} | \eta(\mathbf{x}) = \text{一定値}\}$ 上の x_1 に対して x_2 は狭義単調減少である。
6. $\{\mathbf{x} | \eta(\mathbf{x}) = \text{一定値}\}$ 上の x_2 に対して x_1 は狭義単調減少である。

点 $L = (x_1^L, x_2^L)$, $R = (x_1^R, x_2^R)$ とし, 生産可能集合 T^c を $y = 1$ 平面で切断した切断面を図 3 に与える。弧 \widehat{LR} は $\{\mathbf{x} | \eta(\mathbf{x}) = 1\}$ である。この切断面に現れる生産可能集合は弧 \widehat{LR} , L を始点として持つ縦軸と平行な半直線, R を始点として持つ横軸と平行な半直線に囲まれる領域である。 T^c が多面体なので弧 \widehat{LR} は複数の線分から成るが, 単純化して曲線として与えた。 T^c の定義より, 任意の正数 α と任意の $\mathbf{x} \in \widehat{LR}$ に対して $\alpha(\mathbf{x}, 1) \in \partial(T^c)$ かつ $\eta(\alpha\mathbf{x}) = \alpha$ である。原点 o から点 L に伸びる直線は $\{(x_1, x_2) | x_2^L x_1 = x_1^L x_2\}$ である。原点 o から点 R に伸びる直線は $\{(x_1, x_2) | x_2^R x_1 = x_1^R x_2\}$ である。この 2 つの直線に囲まれる各点 \mathbf{x} に対して $(\mathbf{x}, y) \in \partial(T^c)$ となる y が存在する。逆に, L と R の定義から, $(\mathbf{x}, y) \in \partial(T^c)$ となる y が存在する点 \mathbf{x} はこの 2 つの直線に囲まれる領域にある。実際, $(\mathbf{x}, y) \in \partial(T^c)$ であれば, $\mathbf{x}/y \in \widehat{LR}$ である。

2 点 \mathbf{x} , \mathbf{z} を結ぶ線分も $\widehat{\mathbf{xz}}$ と書く。 $(\mathbf{p}, 1) \in T^c$ に対して $\min \{\|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{p}, 1)\| | \eta(\xi) \leq 1\}$ の最適解を

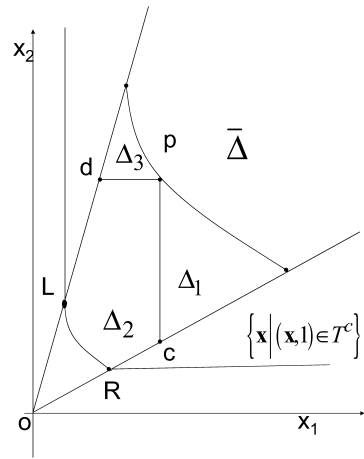


図 3 Ω の分割

ξ^* とする。 $\mathbf{p} \in \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c\}$ かつ $\eta(\xi^*) \leq 1$ なので, $\widehat{\mathbf{p}\xi^*}$ と $\{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c\}$ の境界は交点 $\bar{\mathbf{a}}$ を持つ。ここで, $a_1 = \min\{\bar{a}_1, x_1^R\}$, $a_2 = \min\{\bar{a}_2, x_2^L\}$ とする。 $\mathbf{a} \in \widehat{LR}$ であり, $\eta(\mathbf{a}) = 1$ である。さらに, $(\xi_1^*, \xi_2^*) \leq (a_1, a_2) \leq (p_1, p_2)$ または $(-\xi_1^*, \xi_2^*) \leq (-a_1, a_2) \leq (-p_1, p_2)$ または $(\xi_1^*, -\xi_2^*) \leq (a_1, -a_2) \leq (p_1, -p_2)$ である。したがって,

$$\begin{aligned} & \|(\xi^*, \eta(\xi^*)) - (\mathbf{p}, 1)\| \\ &= |\xi_1^* - p_1| + |\xi_2^* - p_2| + |\eta(\xi^*) - 1| \\ &\geq |\xi_1^* - a_1 + a_1 - p_1| + |\xi_2^* - a_2 + a_2 - p_2| \\ &= |\xi_1^* - a_1| + |a_1 - p_1| + |\xi_2^* - a_2| + |a_2 - p_2| \\ &\geq |p_1 - a_1| + |p_2 - a_2| = \|(\mathbf{a}, \eta(\mathbf{a})) - (\mathbf{p}, 1)\| \end{aligned}$$

が成立し, \mathbf{a} も $\min \{\|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{p}, 1)\| | \eta(\xi) \leq 1\}$ の最適解である。つまり,

$$\begin{aligned} & \min \{\|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{p}, 1)\| | \eta(\xi) \leq 1\} \\ & \geq \min \{\|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{p}, 1)\| | \eta(\xi) \geq 1\} \end{aligned}$$

である。同様に, 以下も証明できる。

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{q}, q_3)\| \left| \begin{array}{l} \eta(\xi) \leq 1 \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right. \right\} \\ & \geq \min \left\{ \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{q}, q_3)\| \left| \begin{array}{l} \eta(\xi) \geq 1 \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

以上から, $(x_1, x_2, 1) \in T^c$ に対する単調性判定 (4) は

$$\begin{aligned} & \min \{\|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{p}, 1)\| | \eta(\xi) \geq 1\} \\ &= \min \left\{ \|(\mathbf{x}', \eta(\mathbf{x}')) - (\bar{\mathbf{x}}, \bar{y})\| \left| \begin{array}{l} \eta(\mathbf{x}') \geq 1 \\ (\bar{\mathbf{x}}, -\bar{y}) \geq (\mathbf{x}, -1) \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \tag{13}$$

として考えてよい。

補助定理 1 の証明

点 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ は $(\mathbf{p}, 1) \in T^c$ かつ $x_2^L p_1 \geq x_1^L p_2$ かつ $x_2^R p_1 \leq x_1^R p_2$ を満たすものとする。つまり、点 \mathbf{p} は補助定理 1 の \mathbf{x} の前提条件を満たす。図 3 には、点 \mathbf{p} と $\{\mathbf{x} | \eta(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{p})\}$ の例を与える。 $\Omega = \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, y) \in \partial(T^c), y \geq 1\}$ とする。領域 Ω を 4 つの領域

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c, \eta(\mathbf{x}) \geq \eta(\mathbf{p})\}, \\ \Delta_1 &= \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c, \eta(\mathbf{c}) \leq \eta(\mathbf{x}) \leq \eta(\mathbf{p}), x_1 \geq p_1\}, \\ \Delta_2 &= \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c, 1 \leq \eta(\mathbf{x}) \leq \eta(\mathbf{p}), x_1 \leq p_1, x_2 \leq p_2\}, \\ \Delta_3 &= \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c, \eta(\mathbf{d}) \leq \eta(\mathbf{x}) \leq \eta(\mathbf{p}), x_2 \geq p_2\} \end{aligned}$$

に分ける。補助定理 1 は以下を示すことである。

$$\begin{aligned} &\min \{ \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \xi \in \Omega \} \\ &= \min \left\{ \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \xi \in \Omega, \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

ここでは、4 つの領域 $\bar{\Delta}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ごとに (14) 両辺を比較する。まず、領域 $\bar{\Delta}$ で検討しよう。

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{p}) - 1 &= \|(\mathbf{p}, \eta(\mathbf{p})) - (\mathbf{p}, 1)\| \\ &\geq \min \{ \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \xi \in \bar{\Delta} \} \\ &\geq \min \left\{ \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \xi \in \bar{\Delta}, \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right\} \\ &\geq \min \{ |\eta(\xi) - q_3| \mid \xi \in \bar{\Delta}, q_3 \leq 1 \} = \eta(\mathbf{p}) - 1 \end{aligned}$$

が成立する。したがって、(14) はその両辺の Ω を $\bar{\Delta}$ に代えても成立する。

次に、領域 Δ_1 で検討する。任意の $\xi \in \Delta_1$ に対して $\bar{\xi} \in \widehat{pc}$ が存在して $\eta(\xi) = \eta(\bar{\xi})$ が成り立つ。これは $\eta(\cdot)$ の連続性から成立する。さらに、 $\bar{\xi}_1 = p_1 \leq \xi_1$ から、 $\bar{\xi}_2 \geq \xi_2$ が成立する。したがって、任意の $\xi \in \Delta_1$ に対して

$$\begin{aligned} &\min \{ \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \} \\ &\geq \min \{ q_2 - \xi_2 + \eta(\xi) - q_3 \mid q_2 \geq p_2, q_3 \leq 1 \} \\ &= p_2 - \xi_2 + \eta(\xi) - 1 \geq p_2 - \bar{\xi}_2 + \eta(\bar{\xi}) - 1 \\ &= \|(\bar{\xi}, \eta(\bar{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \\ &\geq \min \{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \widehat{pc} \} \\ &\geq \min \{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \Delta_1 \} \end{aligned}$$

となる。したがって、(14) はその両辺の Ω を Δ_1 に代えても成立する。同様に、(14) はその両辺の Ω を Δ_3 に代えても成立することが証明できる。

領域 Δ_2 で検討する。任意の $\xi \in \Delta_2$ に対して

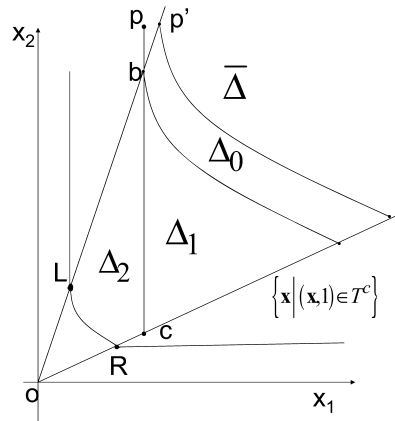


図 4 $\mathbf{p} \notin \Omega$ による Ω の分割

$$\begin{aligned} &\min \{ \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \} \\ &\geq \min \{ q_1 - \xi_1 + q_2 - \xi_2 + \eta(\xi) - q_3 \mid \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \} \\ &\geq p_1 - \xi_1 + p_2 - \xi_2 + \eta(\xi) - 1 = \|(\xi, \eta(\xi)) - (\mathbf{p}, 1)\| \\ &\geq \min \{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \Delta_2 \} \end{aligned}$$

が成立する。したがって、(14) はその両辺の Ω を Δ_2 に代えても成立する。

以上から、(14) はその両辺の Ω を 4 つの領域 $\bar{\Delta}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ のいずれかに代えても成立した。つまり、(14) そのものが成立し、補助定理 1 が証明できた。

補助定理 2 の証明

点 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ は $(\mathbf{p}, 1) \in T^c$ かつ $x_2^L p_1 < x_1^L p_2$ を満たすものとする。つまり、点 \mathbf{p} は補助定理 2 の \mathbf{x} の前提条件を満たす。図 4 には、点 \mathbf{p} の例を与える。点 $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ は $b_1 = p_1$ かつ $b_2 = \max\{x_2 | (p_1, x_2) \in \Omega\}$ とする。点 $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ は $c_1 = p_1$ かつ $c_2 = \min\{x_2 | (p_1, x_2) \in \Omega\}$ とする。 $x_2^L p_1 < x_1^L p_2$ から、 $p_2 > b_2 \geq c_2$ である。点 $\mathbf{p}' = (p'_1, p'_2)$ は $p'_2 = p_2$ かつ $p'_1 = \min\{x_1 | (x_1, p_2) \in \Omega\}$ である。 \mathbf{p}' は原点 o から点 L へ伸びる半直線上にある。 $x_2^L p_1 < x_1^L p_2$ であるから $p'_1 > p_1$ である。領域 Ω を 4 つの領域

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c, \eta(\mathbf{x}) \geq \eta(\mathbf{p}')\}, \\ \Delta_0 &= \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c, \eta(\mathbf{b}) \leq \eta(\mathbf{x}) \leq \eta(\mathbf{p}')\}, \\ \Delta_1 &= \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c, \eta(\mathbf{c}) \leq \eta(\mathbf{x}) \leq \eta(\mathbf{b}), x_1 \geq p_1\}, \\ \Delta_2 &= \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, 1) \in T^c, 1 \leq \eta(\mathbf{x}) \leq \eta(\mathbf{b}), x_1 \leq p_1\} \end{aligned}$$

に分ける。まず、領域 $\bar{\Delta}$ で検討しよう。 L の定義と $L \in \widehat{op}'$ から、任意の $\xi \in \bar{\Delta}$ は $p_1 < p'_1 \leq \xi_1$ を満たす。したがって、 $\mathbf{p}' \in \bar{\Delta}$ から、

$$\begin{aligned}
& \min \{ \|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Delta} \} \\
&= \min \{ |\xi_1 - p_1| + |\xi_2 - p_2| + |\eta(\boldsymbol{\xi}) - 1| \mid \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Delta} \} \\
&\geq p'_1 - p_1 + \eta(\mathbf{p}') - 1 + \min \{ |\xi_2 - p_2| \mid \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Delta} \} \\
&\geq p'_1 - p_1 + \eta(\mathbf{p}') - 1 > \eta(\mathbf{p}') - 1 \\
&= \|(\mathbf{p}', \eta(\mathbf{p}')) - (\mathbf{p}', 1)\| \\
&\geq \min \left\{ \|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Delta}, \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right\} \\
&\geq \min \{ |\eta(\boldsymbol{\xi}) - q_3| \mid \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Delta}, q_3 \leq 1 \} = \eta(\mathbf{p}') - 1
\end{aligned}$$

が成立する. したがって, (14) はその両辺の Ω を $\bar{\Delta}$ に代えると以下の大小関係が成立する.

$$\begin{aligned}
& \min \{ \|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Delta} \} > \eta(\mathbf{p}') - 1 \\
&= \min \left\{ \|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Delta}, \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right\}. \quad (15)
\end{aligned}$$

領域 Δ_0 で検討しよう. 任意の $\boldsymbol{\xi} \in \Delta_0$ に対して $\mathbf{x} \in \widehat{\mathbf{p}'\mathbf{b}}$ が存在して $\eta(\boldsymbol{\xi}) = \eta(\mathbf{x})$ かつ $(-x_1, x_2) \geq (-\xi_1, \xi_2)$ を満たす. 任意の $(\mathbf{q}, -q_3) \geq (\mathbf{p}, -1)$ に対して,

$$\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{q}, q_3)\| &\geq q_2 - \xi_2 + \eta(\boldsymbol{\xi}) - q_3 \\
&\geq p_2 - \xi_2 + \eta(\boldsymbol{\xi}) - 1 \\
&\geq p_2 - x_2 + \eta(\mathbf{x}) - 1
\end{aligned}$$

が成立する. $\eta(\mathbf{x}) = x_2/x_2^L$ ($\mathbf{x} \in \widehat{\mathbf{p}'L}$) から以下を得る.

$$\min \{ \|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \boldsymbol{\xi} \in \Delta_0 \} \quad (16)$$

$$\geq \min \left\{ \|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi} \in \Delta_0 \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
&= \min \{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (x_1, p_2, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \widehat{\mathbf{p}'\mathbf{b}} \} \\
&= \min \{ p_2 - x_2 + \eta(\mathbf{x}) - 1 \mid \mathbf{x} \in \widehat{\mathbf{p}'\mathbf{b}} \} \\
&= \min \left\{ p_2 - x_2 + \frac{x_2}{x_2^L} - 1 \mid \mathbf{x} \in \widehat{\mathbf{p}'\mathbf{b}} \right\}. \quad (18)
\end{aligned}$$

$x_2^L \leq 1$ であれば, (18) の $p_2 - x_2 + \frac{x_2}{x_2^L} - 1$ は x_2 の単調増加関数なので, (18) の最小値は $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ で達成され, その値は $p_2 - (x_2^L/x_1^L)p_1 + p_1/x_1^L - 1$ である. $b_1 = p_1$ なので, (17) と (16) の最適 \mathbf{x} は $\mathbf{b} \in \Delta_0$ であり, さらに, 2つの最適値は (18) の最小値に一致し,

$$p_2 - \frac{x_2^L}{x_1^L}p_1 + \frac{p_1}{x_1^L} - 1 \leq \frac{p_2}{x_2^L} - 1 = \eta(\mathbf{p}') - 1 \quad (19)$$

が成立する. これは, $x_2^L \leq 1$ ならば (14) はその両辺の Ω を Δ_0 に代えても成立することを意味する.

$x_2^L > 1$ であれば, (18) の $p_2 - x_2 + \frac{x_2}{x_2^L} - 1$

は x_2 の狭義単調減少関数なので, (18) の最小値は $\frac{p_2}{x_2^L} - 1 = \eta(\mathbf{p}') - 1$ であり, $\mathbf{x} = \mathbf{p}'$ のみで達成される. さらに, $p_2/x_2^L - 1 < p_2 - (x_2^L/x_1^L)p_1 + p_1/x_1^L - 1 = \|(\mathbf{b}, \eta(\mathbf{b})) - (\mathbf{p}, 1)\|$ である. 一方, $\boldsymbol{\xi} \in \Delta_0 \setminus \{\mathbf{b}\}$ ならば, $\xi_1 > p_1$ である. 任意の $\boldsymbol{\xi} \in \Delta_0 \setminus \{\mathbf{b}\}$ に対してある $\mathbf{x} \in \widehat{\mathbf{p}'\mathbf{b}}$ が存在して $\eta(\boldsymbol{\xi}) = \eta(\mathbf{x})$ かつ $(-x_1, x_2) \geq (-\xi_1, \xi_2)$ を満たすので,

$$\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| &= |\xi_1 - p_1| + p_2 - \xi_2 + \eta(\boldsymbol{\xi}) - 1 \\
&> p_2 - \xi_2 + \eta(\boldsymbol{\xi}) - 1 \geq p_2 - x_2 + \eta(\mathbf{x}) - 1 \geq \frac{p_2}{x_2^L} - 1
\end{aligned}$$

である. 以上から,

$$(16) \text{ の最適値 } > (17) \text{ の最適値 } = \eta(\mathbf{p}') - 1 \quad (20)$$

が成り立ち, $x_2^L > 1$ ならば (14) はその両辺の Ω を Δ_0 に代えると成立しない.

Δ_1 と Δ_2 に対して検討する. 補定理 1 の Δ_1 または Δ_2 に対する同様な証明により以下が成立する.

$$\begin{aligned}
& \min \left\{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \Delta_1 \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right\} \\
&= \min \{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \widehat{\mathbf{b}\mathbf{c}} \} \\
&= \min \{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \Delta_1 \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \min \left\{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \Delta_2 \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right\} \\
&= \min \{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \Delta_2 \}.
\end{aligned}$$

つまり, (14) の両辺の Ω を $\Delta_1 \cup \Delta_2$ に代えた以下の式が成立する.

$$\begin{aligned}
& \min \left\{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array} \right\} \\
&= \min \{ \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \}.
\end{aligned}$$

任意の $\mathbf{x} \in \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$ を考える. 任意の $\mathbf{q} \geq \mathbf{p}$ と任意の $q_3 \leq 1$ に対して,

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{q}, q_3)\| &= |x_1 - q_1| + |x_2 - q_2| \\
&\quad + |\eta(\mathbf{x}) - q_3| \\
&\geq q_2 - x_2 + \eta(\mathbf{x}) - q_3 \geq p_2 - x_2 + \eta(\mathbf{x}) - 1
\end{aligned}$$

が成立する. ここで, $\boldsymbol{\xi} \in \arg \min \{ \xi_1 \mid \boldsymbol{\xi} \in \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2, \xi_2 = x_2 \}$ とすると, $\boldsymbol{\xi} \in \widehat{\mathbf{p}'L} \cup \widehat{LR}$ かつ $\eta(\boldsymbol{\xi}) \leq \eta(\mathbf{x})$ である. さらに, $\eta(\boldsymbol{\xi}) = \max \{ \frac{\xi_2}{x_2^L}, 1 \}$ ($\boldsymbol{\xi} \in \widehat{\mathbf{p}'L} \cup \widehat{LR}$) である. つまり, $x_2 = \xi_2$ であるから,

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \geq p_2 - x_2 + \eta(\mathbf{x}) - 1 \\
& \geq p_2 - \xi_2 + \eta(\boldsymbol{\xi}) - 1 = p_2 - \xi_2 + \max\left\{\frac{\xi_2}{x_2^L}, 1\right\} - 1 \\
& = p_2 - x_2 + \max\left\{\frac{x_2}{x_2^L}, 1\right\} - 1
\end{aligned}$$

である. $h(x_2) = p_2 - x_2 + \max\left\{\frac{x_2}{x_2^L}, 1\right\} - 1$ と定義すると, $\|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \geq h(x_2)$ である.

$x_2^L > 1$ であるとき, 関数 $h(\cdot)$ は区間 $[x_2^R, p_2]$ で狭義単調減少関数である. したがって, $x_2^R \leq b_2 < p_2$ から,

$$\min\{h(\xi) | x_2^R \leq \xi \leq b_2\} = h(b_2) > h(p_2) = \frac{p_2}{x_2^L} - 1$$

である. $h(b_2) = \|(\mathbf{b}, \eta(\mathbf{b})) - (\mathbf{p}, 1)\|$ かつ $h(p_2) = \eta(\mathbf{p}') - 1$ なので,

$$\begin{aligned}
h(b_2) &= \|(\mathbf{b}, \eta(\mathbf{b})) - (\mathbf{p}, 1)\| \\
&\geq \min\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \boldsymbol{\xi} \in \Delta_1 \cup \Delta_2\} \\
&\geq \min\{h(\xi) | x_2^R \leq \xi \leq b_2\} = h(b_2) > h(p_2) = \eta(\mathbf{p}') - 1
\end{aligned}$$

が成立する. したがって, $x_2^L > 1$ であるとき,

$$\begin{aligned}
& \min\left\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi} \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array}\right\} \\
&= \min\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \boldsymbol{\xi} \in \Delta_1 \cup \Delta_2\} \\
&> \eta(\mathbf{p}') - 1
\end{aligned} \tag{21}$$

である.

$x_2^L \leq 1$ であるとき, 関数 $h(\cdot)$ は区間 $[x_2^L, p_2]$ で単調増加関数である. したがって, $x_2^L \leq b_2 < p_2$ から,

$$\begin{aligned}
& \min\left\{\|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \\ \mathbf{q} \geq \mathbf{p}, q_3 \leq 1 \end{array}\right\} \\
&= \min\{\|(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \mathbf{x} \in \Delta_1 \cup \Delta_2\} \\
&\leq \|(\mathbf{b}, \eta(\mathbf{b})) - (\mathbf{p}, 1)\| = h(b_2) \\
&\leq h(p_2) = \eta(\mathbf{p}') - 1.
\end{aligned} \tag{22}$$

したがって, (14) はその両辺の Ω を $\Delta_1 \cup \Delta_2$ に代えても成立する. しかし, $x_2^L > 1$ であれば, それらの最適値は $\eta(\mathbf{p}') - 1$ より大きく, $x_2^L \leq 1$ であれば, それらの最適値は $\eta(\mathbf{p}') - 1$ 以下である.

以上より, $x_2^L > 1$ であれば, (15), (20), (21) から,

$$\begin{aligned}
& \min\left\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ \mathbf{p} \leq \mathbf{q}, q_3 \leq 1 \end{array}\right\} \\
&= \eta(\mathbf{p}') - 1 \\
&< \min\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \boldsymbol{\xi} \in \bar{\Delta} \cup \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2\}
\end{aligned}$$

である. $x_2^L \leq 1$ であれば, (15), (19), (22) から,

$$\begin{aligned}
& \min\left\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ \mathbf{p} \leq \mathbf{q}, q_3 \leq 1 \end{array}\right\} \\
&= \min\left\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{q}, q_3)\| \mid \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi} \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \\ \mathbf{p} \leq \mathbf{q}, q_3 \leq 1 \end{array}\right\} \\
&= \min\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \boldsymbol{\xi} \in \Delta_1 \cup \Delta_2\} \\
&= \min\{\|(\boldsymbol{\xi}, \eta(\boldsymbol{\xi})) - (\mathbf{p}, 1)\| \mid \boldsymbol{\xi} \in \Omega\}
\end{aligned}$$

であるので, 補助定理 2 が証明できた. 同様に補助定理 3 も証明できる.