制約つき単調劣モジュラ関数最大化とその応用

藤井　海斗

東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース（現：京都大学大学院情報学研究科知能情報学専攻）

指導教員：岩田覚 東京大学教授

1. はじめに

単調劣モジュラ関数とは，任意の集合 $A, B \subseteq E$ に対して $f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B)$ と $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$ を満たすような集合関数 $f : 2^E \to \mathbb{R}$ のことを指す．近年，多様な応用分野にこの単調劣モジュラ関数が現れることがわかってきており，理論だけではなく応用の観点からも，制約つき単調劣モジュラ関数最大化に対する関心が高まっている．さまざまな制約が考えられているが，ほぼすべての問題がNP困難であり，近似アルゴリズムの研究が盛んである．あるアルゴリズムが α-近似であるとは，対象となるクラスの任意の問題に対して最適値の α 倍以上の解を返すことをいう．

最も注目されている問題の一つが，組合せオークションなどに応用をもつマトロイド制約である．Fisher et al. [1] によって貪欲法が1/2-近似になることが証明されて以来，30年近くよりよい近似比のアルゴリズムは見つかっていなかったが，近年になって (1 − 1/e)-近似アルゴリズムが次々に発表されている．

一方で，マトロイド制約よりも難しい制約に対する研究も進んでいる．その一つがFeldman et al. [2] が提案した局所探索法である．このアルゴリズムは，p-交換システム制約に対して $1/(p + \frac{1}{k} + \epsilon)$-近似を達成する．$k$ は正の整数のパラメータであり，k を大きくすれば近似比はよくなるが，計算量は k について指数的に大きくなる．

p-交換システムは多くの制約を含むクラスであり，たとえば b-マッチング制約は2-交換システムの特別な場合である．b-マッチング制約のもとで単調劣モジュラ関数を最大化する問題は，影響最大化に関する応用が発見されたため，高速な近似アルゴリズムの必要性が増している．

本論文では，マトロイド制約と b-マッチング制約それぞれに対して，近似アルゴリズムに関する研究を行った．

2. 本論文の結果

マトロイド制約に対する三つの (1 − 1/e)-近似アルゴリズムと1/2-近似の貪欲法を実装し，その性能を実験的に比較した．ランダムに生成した問題に対しては，理論的な近似比では劣る貪欲法が，(1 − 1/e)-近似のアルゴリズムよりもよい近似比を示すことがわかった．

b-マッチング制約に対して，新たに二つの近似アルゴリズムを提案し，その近似比と計算時間に対して理論的な評価を行った．一つ目は $\mathrm{O}(bm)$ 時間で1/4-近似が求まる歩道探索アルゴリズム，二つ目は $\mathrm{O}(b^3 nm \log \frac{1}{\epsilon})$ 時間で $(2/5 - \epsilon)$-近似が求まる乱択局所探索法である．

b-マッチング制約つき単調劣モジュラ関数最大化の応用として，コンテンツ拡散最大化問題がある．この問題に対していくつかのアルゴリズムを実装し，その実行時間と近似解の比較を行った．提案手法である歩道探索アルゴリズムは閾値つき貪欲法よりも遅かったが，それに対して遅延評価の性質が関与しているのではないかという考察を与えた．

3. マトロイド制約に対する実験

近年，マトロイド制約に対するアルゴリズムが次々に開発されている．最初の (1 − 1/e)-近似アルゴリズムはCalinescu et al. [3] による連続貪欲法である．次に発表されたFilmus and Ward [4] によるポテンシャル局所探索法は，連続貪欲法とは違うアプローチで同様の近似比を達成した．Badanidiyuru and Vondrák [5] は，閾値を導入して連続貪欲法を高速化する閾値つき連続貪欲法を発表した．

これら三つのアルゴリズムと貪欲法を実装し，計算機実験を行った．連続貪欲法は小さなサイズの問題でも莫大な時間がかかったため省略した．まず，ランダムに重みつき被覆関数を生成し，ランダムな線形マトロイドと分割マトロイドを制約として実験した．その結果，すべてのアルゴリズムが理論的な近似比よりよい0.9以上の近似比を示した．比較すると，計算時間，近似比ともに貪欲法が最良であり，実用的に最も性能がよいのは貪欲法ではないか，という仮説が得られた．

また，貪欲法が1/2-近似解を出力してしまう特殊な問題例が知られている [1]．そのような問題に対しても実験を行った結果，貪欲法が確かに1/2-近似解を出力

する一方で，三つの (1 − 1/e)-近似アルゴリズムはすべて最適解の 0.9 倍以上のよい解を返した．

近似比の算出のために最適解を全探索によって求めていたが，サイズの大きな問題に対しては全探索はできない．そこで，多項式時間で最適解が求まる関数のクラスとして知られる層凹関数をランダムに生成して実験し，近似比を算出した．その結果，よりサイズの大きな問題でも，すべてのアルゴリズムが 0.9 以上のよい近似比を示した．

4. b-マッチング制約に対するアルゴリズムの提案

b-マッチング制約とは，与えられたグラフの枝集合全体を台集合として，解集合の各点の次数が b 以下でなければならないという制約である．この制約のもとでの単調劣モジュラ関数最大化は，コンテンツ拡散最大化問題という応用が提案されため，重要性が増している．制約を表すグラフの点数を n，枝数を m とすると，貪欲法が $\mathrm{O}(bnm)$ 時間で 1/3-近似を，閾値つき貪欲法 [5] が $\mathrm{O}(\frac{m}{\epsilon}\log\frac{m}{\epsilon})$ 時間で $(1/3-\epsilon)$-近似を実現する．本論文では，この問題に対して新たに二つの近似アルゴリズムを提案した．

一つ目は $\mathrm{O}(bm)$ 時間で 1/4-近似が得られる歩道探索アルゴリズムであり，Mestre [6] が線形関数に対して提案したアルゴリズムの単調劣モジュラ関数への拡張になっている．貪欲法に比べて近似比は悪いが，計算量も小さいアルゴリズムだといえる．

Feldman et al. [2] が提案した局所探索法は，任意の正の整数 k と正の実数 ϵ に対して，$\mathrm{O}(b^{k+1}n^{k+1}m\epsilon^{-1})$ 時間で $1/(2+\frac{1}{k}+\epsilon)$-近似を達成できる．このアルゴリズムは $k \geq 2$ のとき貪欲法よりもよい近似比となるが，計算量が大きいため実用的ではなかった．本論文では，局所探索法を $k=2$ の場合に高速化する乱択局所探索法を提案した．ここでも Mestre [6] が線形関数に対して提案した乱択化手法を用いた．このアルゴリズムは，期待値として，$\mathrm{O}(b^3nm\log\frac{1}{\epsilon})$ 時間で $(2/5-\epsilon)$-近似を達成する．

5. コンテンツ拡散最大化問題に対する実験

Chaoji et al. [7] が提案したコンテンツ拡散最大化問題は，ソーシャルネットワークにおいて誰と誰が友だちになればコンテンツがより拡散しやすくなるかを考える問題である．この問題は，b-マッチング制約つき単調劣モジュラ関数最大化の特別な場合になっている．[7] では連続貪欲法を用いることを提案しているが，連続貪欲法は計算量が $\tilde{\mathrm{O}}(n^7)$ と大きく，また理論的に保証されている近似比は期待値として $\frac{1}{3+2\epsilon}(1-1/\mathrm{e})$ であり，貪欲法の 1/3 よりも悪い．

本論文では，この問題に対してより高速な閾値つき貪欲法，歩道探索アルゴリズム，貪欲法を実装し，計算機実験を行った．その結果，理論的には最も速い歩道探索アルゴリズムよりも，閾値つき貪欲法の方が高速だった．この原因として，すべてのアルゴリズムに適用している遅延評価という高速化手法が挙げられる．目的関数が線形関数に近いため遅延評価がよく機能し，遅延評価と性質の似た歩道探索アルゴリズムはあまり効果を発揮しなかったのではないかと考えられる．

参考文献

[1] M. L. Fisher, G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, “An analysis of approximations for maximizing submodular set functions II,” *Mathematical Programming Studies*, **8**, pp. 73–87, 1978.

[2] M. Feldman, J. Naor, R. Schwartz and J. Ward, “Improved approximations for k-exchange systems,” In *Proceedings of 19th Annual European Symposium on Algorithms*, pp. 784–798, 2011.

[3] G. Calinescu, C. Chekuri, M. Pál and J. Vondrák, “Maximizing a submodular set function subject to a matroid constraint,” *SIAM Journal on Computing*, **40**, pp. 1740–1766, 2011.

[4] Y. Filmus and J. Ward, “Monotone submodular maximization over a matroid via non-oblivious local search,” *SIAM Journal on Computing*, **43**, pp. 514–542, 2014.

[5] A. Badanidiyuru and J. Vondrák, “Fast algorithms for maximizing submodular functions,” In *Proceedings of the 25th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 1497–1514, 2014.

[6] J. Mestre, “Greedy in approximation algorithms,” In *Proceedings of 14th Annual European Symposium on Algorithms*, pp. 528–539, 2006.

[7] V. Chaoji, S. Ranu, R. Rastogi and R. Bhatt, “Recommendations to boost content spread in social networks,” In *Proceedings of 21st International World Wide Web Conference*, pp. 529–538, 2012.