Birkhoff 表現定理の半束への拡張とその応用

中島　蒼

東京大学工学部計数工学科（現：東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻）

指導教員：平井広志　東京大学准教授

1.　はじめに

Birkhoff 表現定理により，分配束はその $\vee$-既約な元がなす半順序集合としてコンパクトに表現でき，逆にその半順序集合のイデアル全体として元の分配束が復元できる．この定理は二つの方向に拡張をされてきた．一つは分配束以外の束もコンパクト表現する方向であり，モジュラ束 [1]，メディアン半束 [2] に拡張されている．もう一つは，直積束の部分束をコンパクトに表現する方向である．これには種々の束上の劣モジュラ関数の最小値集合をコンパクトに表現できるという応用がある．この方向の拡張として，S_k というメディアン半束の直積の $(\wedge,\vee)$-閉集合，すなわち k-劣モジュラ関数の最小値集合のコンパクト表現 [3] がある．

本研究では PPIP(projective PIP) という新しい数学的構造を導入することで，モジュラ半束の Birkhoff 型表現を確立した．またこの表現は，モジュラ半束の直積の $(\wedge,\vee)$-閉集合の表現にも使えることを示した．この応用として，モジュラ半束上での劣モジュラ関数 [4] の最小値集合をコンパクトに表現できる．またブロック DM 分解 [5] を構成するのにも応用できる．本稿では割愛するが，推論基底 [6] によるコンパクト表現も行った．

用語と記法

P を半順序集合とし，順序を $\leq$ で表す．$I \subset P$ がイデアルであるとは，$x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I$ が成り立つことをいう．本稿では，束や半束はすべて有限であるとする．半束は $\wedge$-半束であるとする．半束についても最小上界が存在するときには $\vee$ を用いて表す．L を半束とする．$a \in L$ が $\vee$-既約な元であるとは，a は最小元ではなく，$a = b \vee c \Rightarrow$「$a = b$ または $a = c$」が成り立つことをいう．直積 L^n には直積順序を入れ，この順序についての束構造 $\wedge, \vee$ を考える．これは成分ごとに計算した結果と一致する．$z \in L^n$ に対し，$z[i]$ で z の第 i 成分を表す．B が L^n の $(\wedge,\vee)$-閉集合であるとは，B は $\wedge$ に閉じていて，$a, b \in B$ について，$a \vee b$ が L^n で存在するなら，$a \vee b \in B$ となることとする．$\pi_i(B) := \{b[i] \mid b \in B\}$ と定義する．

2.　モジュラ半束の Birkhoff 型表現

定義 1.　以下の条件を満たす半束 L をモジュラ半束と呼ぶ．

1. $x \in L$ の主イデアル $\{l \in L \mid l \leq x\}$ はモジュラ束．
2. $x \vee y, y \vee z, z \vee x$ が存在するなら $x \vee y \vee z$ も存在．

条件 1 のモジュラ束を分配束に変えたものがメディアン半束である．定義を見ると，モジュラ半束はモジュラ束とメディアン半束を合わせたようなものとなっている．そのため，これらの束のコンパクト表現を組み合わせることでモジュラ半束のコンパクト表現ができると予想できる．コンパクト表現を作る際，メディアン半束では PIP (poset with inconsistent pairs) [2]，モジュラ束では射影順序空間 (projective ordered space) [1] という数学的構造が用いられた．それぞれ，半順序に加えて，非整合対と共線関係という関係が定義されている．本研究ではこれら二つを融合した PPIP という構造を導入し，モジュラ半束の Birkhoff 型表現定理を確立した．

定義 2.　P を半順序集合とする．以下の条件を満たす P 上の対称な二項関係 $\smile$ を非整合対と呼ぶ．

1. $p \smile q$ なら，$p \leq r, q \leq r$ となるような $r \in P$ は存在しない．
2. $p \smile q$ かつ $p \leq p', q \leq q'$ ならば $p' \smile q'$．

定義 3.　以下の条件を満たす P 上の対称な三項関係 $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ を共線関係と呼ぶ．

1. $C(x,y,z)$ ならば x, y, z は相互に比較不能．
2. $C(x,y,z)$ かつ $x, y \leq p$ ならば $z \leq p$．

PPIP はこれら二つの関係が定義された半順序集合で，ある公理を満たすものである．PPIP からモジュラ半束のコンパクト表現から元の半束を復元するとき，イ

デアルの代わりに以下の整合部分空間を用いる．

定義 4. 以下の条件を満たす PPIP P のイデアル I を整合部分空間と呼ぶ．

1. I は非整合対を含まない．
2. $C(x,y,z)$ かつ $x,y \in I$ ならば $z \in I$.

定理 5. モジュラ半束 L の $\vee$-既約元がなす半順序集合を P とする．$p,q,r \in P$ に対して，$p \smile q \Leftrightarrow p \vee q$ が存在しない，$C(p,q,r) \Leftrightarrow p,q,r$ は相互に比較不能だが $\vee$ は存在し $p \vee q = q \vee r = r \vee p$，と定義すると PPIP になる．この PPIP の整合部分空間全体は，包含関係で半順序を入れると元のモジュラ半束と同型になる．

これにより，モジュラ半束は PPIP によりコンパクトに表現できると示された．逆に，すべての PPIP はモジュラ半束のコンパクト表現であり，モジュラ半束と PPIP は一対一に対応することも示した．

3. 直積半束の $(\wedge,\vee)$-閉集合

L をモジュラ半束とする．L^n の $(\wedge,\vee)$-閉集合もまたモジュラ半束であるため，上で述べたのコンパクト表現定理はそれらについても成立する．ただし L^n の要素数は指数爆発するため，実用的には $\vee$-既約元について，現実的な数である保証と効率的な列挙方法が必要になる．

$(\wedge,\vee)$-閉集合の $\vee$-既約元はよい特徴づけがあり，これらの問題が解決される．$(\wedge,\vee)$-閉集合の典型的な例は直積束の部分束である．これに加え，k-劣モジュラ関数や，モジュラ半束上の劣モジュラ関数の最小値集合を含んでいる．この特徴づけは，[3] の S_k についての結果を一般の半束に拡張したものである．

定理 6. B を L^n の $(\wedge,\vee)$-閉集合とする．$\boldsymbol{e}_a^i = \min\{\boldsymbol{b} \in B \mid \boldsymbol{b}[i] = a\}$（$i = 1,2,\ldots n$, a は $\pi_i(B)$ の $\vee$-既約元）は B の $\vee$-既約元である．また B の $\vee$-既約元はこの形のもののみである．

この特徴づけから，$\vee$-既約元の数は $O(n|L|)$ 個という理論保証が得られる．また，ある自然な仮定の下，列挙アルゴリズムも構築できる．特に，L^n 上の劣モジュラ関数の最小値集合は，最小化オラクルの $n^2|L|^2$ 回の呼び出しで列挙できる．また，その PPIP 表現は $O(n^3|L|^3)$ 時間で計算できる．

4. 応用

モジュラ半束のコンパクト表現を得ると，容易に極大鎖を構成することができる．とくに，モジュラ半束上の劣モジュラ関数の最小化オラクルから，最小値集合の極大鎖を計算することが可能である．

これはブロック DM 分解 [5] の計算に応用できる．ブロック DM 分解はモジュラ束上の劣モジュラ関数の最小値集合の極大鎖として得られることが知られている．有限体上の行列の場合で，ブロックサイズと有限体のサイズを固定するとき，この劣モジュラ関数は多項式時間で最小化可能であり [7]，本研究の結果を最小値集合の極大鎖の構成に用いることができる．

参考文献

[1] C. Herrmann, D. Pickering and M. Roddy, “A geometric description of modular lattices,” *Algebra Universalis*, **31**, pp. 365–396, 1994.

[2] J. P. Barthélemy and J. Constantin, “Median graphs, parallelism and posets,” *Discrete Mathematics*, **111**, pp. 49–63, 1993.

[3] H. Hirai and T. Oki, “A compact representation for minimizers of k-submodular functions,” *Journal of Combinatorial Optimization*, to appear.

[4] H. Hirai, “L-convexity on graph structures,” arXiv: 1610.02469, 2016.

[5] H. Ito, S. Iwata and K. Murota, “Block-triangularizations of partitioned matrices under similarity/equivalence transformations,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **15**, pp. 1226–1255, 1994.

[6] M. Wild, “Optimal implicational bases for finite modular lattices,” *Questiones Mathematicae*, **23**, pp. 153–161, 2000.

[7] H. Hirai, “Computing DM-decomposition of a partitioned matrix with rank-1 blocks,” arXiv: 1609.01934, 2016.