Approximation Algorithms for Hub-and-Spoke Network Design Problems and Metric Labeling Problems

黒木　祐子

東京工業大学工学院経営工学系（現所属：東京大学大学院情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻）
指導教員：松井知己　東京工業大学　教授

1. はじめに

実社会では，効率の良いネットワーク設計が多く求められている．例えば，航空ネットワークの設計，通信ネットワークの設計が挙げられる．また近年ではネット通販の拡大によって配送需要が高まっており，コスト効率の良い輸送経路の設計が必要である．広範囲に及ぶ多数の地点間で輸送を行う際，ハブネットワークと呼ばれるネットワーク形態がよく用いられる．ハブネットワークは，輸送の中継地点の役割を果たす点（ハブ）とハブではない点（非ハブ）から成る．このハブネットワークを用いることで，直接全ての点同士を接続することなく，少ない接続リンク数で広範囲に及ぶ輸送が可能になり，輸送コストの削減に繋がる．

ハブネットワーク設計問題は数理最適化問題としてモデル化できる [1]．入力として与えられるものはハブの集合 $H = \{1, 2, \ldots, h\}$，非ハブの集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$，各非ハブのペア $(p, q) \in N^2$ について p から q への輸送量 w_{pq} (≥ 0)，ペア $(i, j) \in (N \cup H)^2$ について i から j への単位輸送コスト c_{ij} である．ハブネットワーク設計問題とは「各非ハブはちょうど 1 つのハブに接続する」という制約のもとで，総輸送コストを最小にするように「各非ハブからハブへの割当」を決定する問題である．この数理最適化問題は，メトリックラベリング問題（エネルギー関数を最小にするように画像の各ピクセルに整数のラベルを割り当てる問題）と数学的に等価であり，画像のノイズ除去や画像分割へのモデリングに応用されている [2]．このような背景から，ハブネットワーク設計問題は，オペレーションズ・リサーチ，通信工学，画像処理など幅広い分野で長年研究されてきたトピックであり，この問題に対する高品質な解を求める汎用的な手法の構築は，重要な研究課題である．

上述のハブネットワーク設計問題は NP 困難である [3]．現在までに，この問題に対する発見的解法と指数時間厳密解法が多く提案されてきた．しかしながら，最良の厳密解法でも，非ハブ数が 200 程度，ハブの数を小さい数に固定した特殊ケースでも 500 程度の小規模な問題しか解けていない [4]．実ネットワークに現れる問題ではノード数が 1,000 以上の問題を扱うことが多くあり，多項式時間精度保証付き近似アルゴリズムの研究の必要性はさらに高まっている．

本研究の成果は，特に通信ネットワークにおいてよく現れるハブの接続形態をモデル化した離散最適化問題に対して，精度保証付きアルゴリズムを提案したことである．一般の場合に対する既存の精度保証付き近似アルゴリズム [2] の近似比は O(log (ハブ数)) である．本論文は精度保証付き近似アルゴリズムに関する次の 2 つの成果をまとめたものである：

(1) サイクル型の場合に対する $2\left(1 - \frac{1}{\text{ハブ数}}\right)$-近似アルゴリズムの提案，および三角不等式の仮定のもとでの $\frac{3}{2} - \frac{1}{2\,(\text{ハブ数}-1)}$-近似アルゴリズムの提案.

(2) スター型の場合に対する約 5.281-近似アルゴリズムの提案.

以降，紙面の都合上，スター型の場合の問題定義および提案手法の概略を述べる

2. スター型ハブネットワーク設計問題

本研究で扱うスター型ハブネットワーク設計問題 (SHP) は，各ハブが中心に位置するハブに接続しているネットワーク形態をモデル化したものである．既存手法 [2, 5] では別の問題への複雑な変換が必要であり，さらにその近似比の解析は非常に複雑であり，簡単な解析ではその近似比が 6 より大きいことがわかっている．本研究では線形緩和問題と従属丸め技法により直接的に解く 5.281-近似アルゴリズムを提案し，既存研究よりも良い結果を与えた.

2.1 問題の定義および定式化

ハブの集合 H，非ハブの集合 N，非ハブ間の輸送量 w_{pq} および単位輸送コスト c_{ij} が与えられる．ここで，各ハブは中心に位置するデポと呼ばれるノードに接続すると仮定する．ℓ_i (≤ 0) はハブ i とデポの間の単位輸送コストとする．

各 $\{p, i\} \in N \times H$ について，非ハブ p をハブ i に接

続するとき 1，そうでない場合 0 である 0-1 変数 x_{pi} とする．すると，SHP は整数計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{(p,q)\in N^2} w_{pq} \left(\begin{array}{c} \sum_{i\in H} c_{pi}x_{pi} + \sum_{j\in H} c_{qj}x_{qj} \\ + \sum_{k\in H} \ell_k |x_{pk} - x_{qk}| \end{array} \right) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{i\in H} x_{pi} = 1 \quad (\forall p \in N), \\
& x_{pi} \in \{0,1\} \quad (\forall \{p,i\} \in N \times H).
\end{aligned}
$$

として定式化できる．上記の整数計画問題において 0-1 制約を $x_{pi} \geq 0$ に緩和し，$|x_{pk} - x_{qk}|$ を新たな非負変数 Z_{pqk} で置き換えることで，線形計画緩和問題（LRP）を導出できる．

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{(p,q)\in N^2} w_{pq} \left(\begin{array}{c} \sum_{i\in H} c_{pi}x_{pi} + \sum_{j\in H} c_{qj}x_{qj} \\ + \sum_{k\in H} \ell_k Z_{pqk} \end{array} \right) \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{i\in H} x_{pi} = 1 \quad (\forall p \in N), \\
& 0 \leq x_{pi} \quad (\forall \{p,i\} \in N \times H), \\
& -Z_{pqk} \leq x_{pk} - x_{qk} \leq Z_{pqk} \ (\forall (p,q) \in N^2, \forall k \in H).
\end{aligned}
$$

内点法によりこの LRP の最適解を多項式時間で得ることができる．

2.2 定数近似アルゴリズム

提案手法では，ハブのクラス分けおよび非ハブのクラス分けをしたのちに各非ハブからハブへの割当を決定する．ハブのクラス分けは，各ハブ $i \in H$ についての ℓ_i の大きさによりハブをいくつかの部分集合（クラス）に分割する．非ハブのクラス分けには，線形緩和問題 LRP の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ を用いた従属ラウンディング技法を用いる．最後に各クラスごとで従属ラウンディングを行うことで 各非ハブからハブへの割当を決定する．

本研究では，スター型の距離をライン型の距離で近似する不等式を示した．さらに非ハブのペア $(p,q) \in N^2$ を固定した場合の部分問題がヒッチコック型輸送問題と等価であることと，距離行列のモンジュ性を用いることで，ハブ間での輸送コストの上界値を与えた．線形項に関しては，近似解における線形項の関数値が緩和問題の最適値と一致することを証明した．これらを用いて，次の定理を示した．

定理 2.1. 提案手法はスター型ハブネットワーク設計問題に対する $\min_{r>1} \frac{r-1}{\log r}(2 + \frac{r^2+1}{r^2-1}) \approx 5.2809$-近似アルゴリズムである．

参考文献

[1] M. O'Kelly, "A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities," *European Journal of Operational Research*, **32**, pp. 393–404, 1987.

[2] J. Kleinberg and E. Tardos, "Approximation algorithms for classification problems with pairwise relationships," *Journal of ACM*, **49**, pp. 616–639, 2002.

[3] J. Sohn and S. Park, "The single allocation problem in the interacting three-hub network," *Networks*, **35**, pp. 17–25, 2000.

[4] R. Z. Farahani, M. Hekmatfar, A. B. Arabani and E. Nikbakhsh, "Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications," *Computers and Industrial Engineering*, **64**, pp. 1096–1109, 2013

[5] G. Konjevod, R. Ravi and F. S. Salman, "On approximating planar metrics by tree metrics," *Information Processing Letters*, **80**, pp. 213–219, 2001.

[6] M. Iwasa, H. Saito and T. Matsui, "Approximation algorithms for the single allocation problem in hub-and-spoke networks and related metric labeling problems," *Discrete Applied Mathematics*, **157**, pp. 2078–2088, 2009.