重み付き投票ゲームの最小コア

田中　雅人

東京工業大学工学院経営工学系
指導教員：松井知己　東京工業大学　教授

1. はじめに

1.1 研究の目的・背景

投票する個人によって票数が異なる投票形式は，重み付き投票ゲームと呼ばれる協力ゲームとしてモデル化することができる．

本研究では，重み付き投票ゲームにおける配分に関して議論する．重み付き投票ゲームではコアが存在するとは限らないため，コアを拡張した概念である最小コアについて議論する．最小コアは，不満の最大値を最小化する配分として知られている．

Elkind et al. [1] は，ϵ-コアが空集合かを判定することがNP困難であることや，楕円体法を用いて擬多項式時間で重み付き投票ゲームにおける最小コアを求解できることを証明した．本研究では重み付き投票ゲームの最小コアの条件を満たす配分を求める線形計画問題で，変数および制約式の数が問題入力の擬多項式サイズとなるものを提案し，実際の例で計算機実験を行う．

1.2 問題設定および用語と記号の説明

プレイヤー集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ とし，その部分集合を提携と呼ぶ．プレイヤー集合 N に対する重み付き投票ゲーム Γ は $(q;\boldsymbol{w})$ によって定義される．q は提携が勝利するために必要な票数を表す正整数であり，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)^\top$ はそれぞれのプレイヤーの票数を表す正整数ベクトルである．

ある提携 S が $\sum_{i\in S} w_i \geq q$ を満たすとき，提携 S を勝利提携と呼び，満たさないとき提携 S を敗北提携と呼ぶ．特性関数 $v: 2^N \to \mathbb{R}$ は提携 S に属するプレイヤーが協力したときの利得 $v(S)$ を与える．重み付き投票ゲームにおいては S が勝利提携に属するとき $v(S)=1$ であり，そうでないとき $v(S)=0$ とする．あるプレイヤー $i\in N$ に対し，i が提携に入っていれば勝利提携に，入っていなければ敗北提携になるとき，プレイヤー i を独裁者と呼ぶ．本論文では独裁者はいないものとする．

各プレイヤーの得る利得を要素としたベクトルを利得ベクトルと呼ぶ．利得ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top$ は n 個の要素をもつベクトルで，x_i はプレイヤー i の利得を表す．（実行可能性）$\sum_{i\in N} x_i = v(N)$，（個人合理性）$x_i \geq v(\{i\})$ $(\forall i\in N)$，を満たす利得ベクトルを配分と呼ぶ．（実行可能性）$\sum_{i\in N} x_i = v(N)$，（提携合理性）$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ $(\forall S\subseteq N)$，を満たす利得ベクトル $\boldsymbol{x}$ の集合をコアと呼ぶ．重み付き投票ゲームのコアは存在するとは限らないため，コアの条件を緩めた ϵ-コアを考える．（実行可能性）$\sum_{i\in N} x_i = v(N)$ と $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)-\epsilon$ $(\forall S\subseteq N)$，を満たす利得ベクトル $\boldsymbol{x}$ の集合を ϵ-コアと呼ぶ．ϵ の値が大きいほど，ϵ-コアの条件は緩いものとなる．最小コアとは ϵ-コアが非空となる最小の ϵ に対する ϵ-コアである [2].

2. 重み付き投票ゲームにおける最小コア

最小コアを求める問題の定式化を行う．以下では勝利提携全体の集合を W とおく．最小コアの定義から，重み付き投票ゲームにおける最小コアとなる ϵ-コアの ϵ を求める問題は

$$
\begin{aligned}
\text{min. } & \epsilon \\
\text{s.t. } & \sum_{i\in N} x_i = 1, \\
& \sum_{i\in S} x_i \geq 1-\epsilon \ (\forall S\in W), \\
& \sum_{i\in S} x_i \geq -\epsilon \ (\forall S\in 2^N\setminus W),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

と定式化される．重み付き投票ゲームは最小コアをもつことが知られている．本研究では以下の定理を示した．

定理 2.1. 最小コアの条件を満たす利得ベクトルは配分の条件を満たす，すなわち非負ベクトルである．

定理 2.2. 重み付き投票ゲーム $(q;\boldsymbol{w})$ について以下の条件は等価である．

1. $\boldsymbol{w}/\sum_{i\in N} w_i$ が最小コアに属する．
2. 以下を満たす q' が存在する．

・$(q;\boldsymbol{w})$ の勝利提携と $(q';\boldsymbol{w})$ の勝利提携が等しい．
・Ω 中のベクトルの非負線形結合によって $\mathbf{1}\in\mathbb{R}^n$ を表現できる．ただし，$\chi^S \in \{0,1\}^n$ は任意の $i\in N$ について $\chi_i^S=1 \Leftrightarrow i\in S$ を満たす特性べ

クトルであり，$\Omega = \{\chi^S \in \{0,1\} | \chi^S \cdot \boldsymbol{w} = q'\}$ である．

3. 提案手法

以下では配分 $\boldsymbol{x}$ が固定されているとして議論する．定理 2.1 より，問題 (1) は以下の問題

$$
\begin{aligned}
\text{P1 : min. } & \epsilon \\
\text{s.t. } & \sum_{i \in N} x_i = 1, \\
& \sum_{i \in S} x_i \geq 1 - \epsilon \ (\forall S \in W), \\
& x_i \geq 0 \ (\forall i \in N),
\end{aligned}
$$

に容易に変換できる．配分に対応する変数 $\boldsymbol{x}$ を固定したとき，問題 P1 の最適値は最短路問題を解くことで得られることを示す．任意の正整数 i に対して，$[i]$, $[i]_0$ をそれぞれ整数集合 $\{1, 2, \ldots, i\}$,$\{0, 1, \ldots, i\}$ とおく．ここで $[n] = N$ である．$\varpi = \sum_{i=1}^{n} w_i$ とおく．頂点集合 $V = [n]_0 \times [\varpi]_0$ および，$i \in [n]$ に対して

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \{((i-1, j), (i, j)) \mid (i, j) \in [n] \times [\varpi]_0\}, \\
A_i &= \{((i-1, j), (i, j + w_i)) \mid j \in [\varpi - w_i]_0\},
\end{aligned}
$$

で定義される枝集合 $A = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n$ をもつ非巡回的有向グラフ $G = (V, A)$ を導入する．頂点集合 $T = \{(n, j) \subseteq V \mid q \leq j\}$ とおく．頂点 $(0, 0) \in V$ を s とおく．この時，s から T へのパスと勝利提携の集合に一対一対応が存在することが容易にわかる．所与の非負ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ に対し，

$$
w^{\boldsymbol{x}}(a) = \begin{cases} 0 & (\text{if } a \in A_0), \\ x_i & (\text{if } a \in A_i), \end{cases}
$$

で定義される枝重み関数 $w^{\boldsymbol{x}} : A \to \mathbb{R}$ を導入する．このとき，ある勝利提携 S に対応するパスの長さは $\sum_{i \in S} x_i$ で表されるので，組 $(\epsilon, \boldsymbol{x})$ が $\sum_{i \in S} x_i \geq 1 - \epsilon \ (\forall S \in W)$ を満たすのは s から T へのパスの最短路長が $1 - \epsilon$ より長いか等しいときであり，かつそのときに限ることがわかる．線形計画問題として表現された最短路問題の双対問題を用いて $\boldsymbol{x}$ を変数として

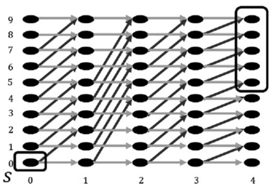

図 1　$(5; 2, 4, 2, 1)$ に対応

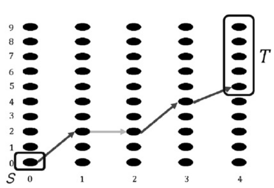

図 2　$\{1, 3, 4\}$ に対応

扱うと，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ が最小コアの条件を満たすのは $\boldsymbol{x}$ が線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{P2: min. } & \epsilon \\
\text{s.t. } & y_T - y(s) \geq 1 - \epsilon, \\
& y(v) - y(u) \leq 0 \quad (\forall (u, v) \in A_0), \\
& y(v) - y(u) \leq x_i \quad (\forall i \in N, \forall (u, v) \in A_i), \\
& y(v) = y_T \quad (\forall v \in T), \\
& \textstyle\sum_{i \in N} x_i = 1, \\
& x_i \geq 0 \quad (\forall i \in N),
\end{aligned}
$$

の最適解であるときであり，かつそのときに限るとわかる．この線形計画問題を多項式時間で解くことにより，擬多項式時間で最小コアの中の配分を得ることができる．

4. 計算機実験

問題 P2 を LP ソルバーで解いた．実行環境は　プロセッサ：Intel(R) Core(TM) i7-8700 @3.20 GHz 3.19 GHz，メモリ：16 GB, Python: 3.6.7, CPLEX: 12.8.0.0 である．

結果は以下のとおりであった．

インスタンス：(270; 45, 41, 27, 26, 26, 25, 21, 17, 17, 14, 13, 13, 12, 12, 12, 11, 10, 10, 10, 10, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)，計算時間：2.56 秒

表 1　アメリカ合衆国選挙

プレイヤー番号 i	利得 x_i	$w_i / \sum_{i \in N} w_i$
1	0.0836431227	0.0836431227
2	0.0762081784	0.0762081784
⋮	⋮	⋮
26	0.0148698885	0.0148698885
27	0.0130111524	0.0130111524
⋮	⋮	⋮
50	0.0055762082	0.0055762082
51	0.0055762082	0.0055762082

参考文献

[1] E. Elkind, L. A. Goldberg, P. W. Goldberg and M. Wooldridge, "On the computational complexity of weighted voting games," *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **56**, pp. 109–131, 2009.

[2] L. S. Shapley and M. Shubik, "Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences," *Econometrica*, pp. 805–827, 1966.