1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

タイムウィンドウ付きアロー・ダイアグラムにおける日程管理について

1504810 防衛大学校 *宝崎隆祐

1．はじめに

タイムウィンドウといわれる時間制約をノード／アークにおいて考慮したネットワーク問題がいくつかの研究分野において考えられてきた．Desrosierら[1]は，ノードiにいる顧客の時間ニーズ$[a_i, b_i]$を満たすように巡回するセールスマン問題をまず取り扱い始めた．そこでは，時間a_iまで待たなければならないにしてもノードiへはいくら早く到着してもよいといった時間制約，いわばソフトなタイムウィンドウ制約を仮定していた．その後，工場内で複数の搬送車を衝突させることなく運行させるための経路決定問題への適用が藤井[2]や宝崎[3]らによってなされている．それは，ある搬送車の通過した時間帯が搬送ネットワーク上で他の搬送車に対しては排他的なタイムウィンドウになるという意味で，上述のそれと異なるハードなタイムウィンドウ制約を持つ．さらに，形態は異なるがプロジェクトの日程管理に見られるアロー・ダイアグラムにタイムウィンドウを適用しようとする試みが藤井，宝崎ら[4] [5]によってなされている．今回は，それらを概観し，最少コストでのプロジェクト遂行時間の短縮について考察する．

2．タイムウィンドウ付きアロー・ダイアグラムと特性値

複数の作業から構成されるプロジェクトは，アークに個々の作業を対応させたアロー・ダイアグラムで表現できる[6]．各作業はその特殊性のゆえに特定の職能集団により遂行される場合が通例であり，その集団は当該プロジェクトだけでなく他のプロジェクトでの作業も同時進行的に請け負っている場合が多い．すなわち彼らのスケジュール表にすでに書き込まれた作業日程には新たな作業を設定することはできない．プロジェクトの開始ノードを1とし終了ノードをnとするノード$N=\{1,\cdots,n\}$とm個のアーク（作業）の集合Aをもつアロー・ダイアグラム$G(N,A)$を考える．そのアーク(i,j)でまだ作業設定の余地のある空きの時間帯（タイムウィンドウ）を$S(i,j)$とし，次式のような時間軸上での閉区間の集合で表す．

$$S(i,j)=\{[s_1^{ijk}, s_2^{ijk}] \mid k=1,\cdots,m_{ij}(\text{閉区間の個数}),\ \text{ただし},\ s_1^{ijk}\le s_2^{ijk} < s_1^{ijk+1}\} \tag{1}$$

また，実数全体を$\mathbb{R}$，(1)式のように表現した閉区間集合の集合族$\mathbb{K}$上での演算子$\mathcal{MIN}, \mathcal{MAX}, \oplus_{ij}, \ominus_{ij}$を次式で定義する．ただし，$t,d\in\mathbb{R}$，$X=\{[x_1^k, x_2^k], k=1,\cdots,p\}\in\mathbb{K}$とする．

$$\mathcal{MIN}\ X = x_1^1,\quad \mathcal{MIN}\ \emptyset=\infty,\quad \mathcal{MAX}\ X = x_2^p,\quad \mathcal{MAX}\ \emptyset = -\infty \tag{2}$$

$$\|X\| = \sum_{k=1}^{p}(x_2^k - x_1^k) \tag{3}$$

$$t\oplus_{ij} d = \min\{\tau \mid \|[t,\tau]\cap S(i,j)\| \ge d\},\quad t\ominus_{ij} d = \max\{\tau \mid \|[\tau,t]\cap S(i,j)\| \ge d\} \tag{4}$$

プロジェクト開始時刻を0，アーク(i,j)の（標準）作業時間をD_{ij}とした場合に，従来のＰＥＲＴ手法で扱われるノードiの最早結合点時刻t_i^E，最遅結合点時刻t_i^L，作業(i,j)の最早開始時刻ES_{ij}，最早終了時刻EF_{ij}，最遅終了時刻LF_{ij}，最遅開始時刻LS_{ij}，トータルフロートTF_{ij}，フリーフロートFF_{ij}の概念はタイムウィンドウのある場合にも拡張可能であり次式で計算できる．

$$\begin{aligned}
&t_1^E=0,\ \ t_j^E=\max_{(i,j)\in A}\left(t_i^E\oplus_{ij} D_{ij}\right), && t_j^L=\min_{(j,k)\in A}\left(t_k^L\ominus_{jk} D_{jk}\right)\\
&ES_{ij}=\mathcal{MIN}\{[t_i^E,\infty]\cap S(i,j)\}, && EF_{ij}=ES_{ij}\oplus_{ij} D_{ij}\\
&LF_{ij}=\mathcal{MAX}\{[0,t_j^L]\cap S(i,j)\}, && LS_{ij}=LF_{ij}\ominus_{ij} D_{ij}\\
&TF_{ij}=\|[ES_{ij}, LS_{ij}]\cap S(i,j)\|, && FF_{ij}=\|[EF_{ij}, t_j^E]\cap S(i,j)\|
\end{aligned}$$

3．クリティカル・パスの不在とプロジェクト遂行時間の短縮

作業(i,j)にはD_{ij}のほか特急作業時間$d_{ij}(<D_{ij})$があり，作業時間を単位時間短縮するごとにc_{ij}の費用が必要であるとする．フロートのないパスを探していくことによりいわゆるクリティカル・パスの有無を

知ることはできるが，タイムウィンドウのある場合にはこれが必ずしも存在するとはいえない．古典的ＣＰＭの手法では，このクリティカル・パス上にある作業のうちで費用勾配の和が最小となる業の組を順次短縮してゆきながら，プロジェクト遂行時間t_n^Eの短縮を最少費用で実現しようとするが[6]，タイムウィンドウのある場合にはこのような手法の適用は困難である．わずかに藤井ら[5]が古典的ＣＰＭ手法を利用した近似解法を提案しているが，未だ最適解法は見いだされていない．ここでは，最適解法提案の第１歩として，タイムウィンドウが１つの時間閉区間から成る場合について考察する．すなわち，以後$S(i,j)=[a_{ij},b_{ij}]$であるとし，パラメトリック・プログラミングからの理論的考察を試みる．

ノードiでの結合点時刻，作業(i,j)の開始時刻及び作業時間をそれぞれt_i，s_{ij},y_{ij}とすると，プロジェクト遂行時間がλ以下となるコスト最小化問題$P|\lambda$，及び双対変数を$v_1,v_2,g_{ij},z_{ij},\nu_{ij},f_{ij},\xi_{ij},\eta_{ij},(i,j)\in A$とする双対問題$D|\lambda$は次のようになる．

問題　$P|\lambda$:

$$\max \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}y_{ij} \tag{5}$$

s.t.

$$t_1 \ge 0 \tag{6}$$

$$t_n \le \lambda \tag{7}$$

$$t_i \le s_{ij}\ ,\ (i,j)\in A \tag{8}$$

$$a_{ij} \le s_{ij}\ ,\ (i,j)\in A \tag{9}$$

$$s_{ij}+y_{ij} \le b_{ij}\ ,\ (i,j)\in A \tag{10}$$

$$s_{ij}+y_{ij} \le t_j\ ,\ (i,j)\in A \tag{11}$$

$$d_{ij} \le y_{ij} \le D_{ij}\ ,\ (i,j)\in A \tag{12}$$

問題　$D|\lambda$:

$$\min \lambda v_2 + \sum_{(i,j)\in A}(-a_{ij}z_{ij}+b_{ij}\nu_{ij}-d_{ij}\xi_{ij}+D_{ij}\eta_{ij}) \tag{13}$$

s.t.

$$v_1,v_2\ge 0\ ,\ g_{ij},z_{ij},\nu_{ij},f_{ij},\xi_{ij},\eta_{ij}\ge 0\ ,\ (i,j)\in A \tag{14}$$

$$-v_1+\sum_{(0,k)\in A} g_{0k}=0 \tag{15}$$

$$\sum_{\{j|(i,j)\in A\}} g_{ij} - \sum_{\{k|(k,i)\in A\}} f_{ki}=0\ ,\ i\in N \tag{16}$$

$$v_2-\sum_{(k,n)\in A} f_{kn}=0 \tag{17}$$

$$-g_{ij}-z_{ij}+\nu_{ij}+f_{ij}=0\ ,\ (i,j)\in A \tag{18}$$

$$\nu_{ij}+f_{ij}-\xi_{ij}+\eta_{ij}=c_{ij}\ ,\ (i,j)\in A \tag{19}$$

この$P|\lambda$の変数$\boldsymbol{x}=\{\overbrace{t_i}^{n},\overbrace{s_{ij}}^{m},\overbrace{y_{ij}}^{m}\}$に対する制約式のパラメータ行列を$\boldsymbol{A}$とし，(6)〜(12)の各不等式のスラック変数ベクトルを$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{b}=\{0,\lambda,\overbrace{0}^{m},\overbrace{-a_{ij}}^{m},\overbrace{b_{ij}}^{m},\overbrace{0}^{m},\overbrace{-d_{ij}}^{m},\overbrace{D_{ij}}^{m}\}$とすると，制限問題$RD|\lambda$は$\max v_2$，s.t. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{wx}=0$，$\boldsymbol{x}\ge 0$となるが，これは条件により変化する２つのタイプの流量がアーク上にあると仮定されるネットワークでの最大流問題と解釈できる．これら主問題，双対問題，制限問題を解いていきながら，逐次にプロジェクト遂行時間の最適短縮化を図ることが可能である．

４．おわりに

ここでは，プロジェクトのアロー・ダイアグラムに１閉区間から成るタイムウィンドウがある場合の最少コストでのプロジェクト遂行時間の短縮化について議論したが，複数区間から成る一般のタイムウィンドウの場合は問題はいわゆる組合せ問題となる．

参考文献

[1] Desrosiers, J., Soumis, F. and Desrochers, M., *Networks*, **14**(1984), 545–565.

[2] Fujii, S., Sandoh H., and Hohzaki R., Proc. of 10th ICPR, 1(1989), 489–494.

[3] Hohzaki R., Fujii, S., and Sandoh H., Electronics and Communications in Japan, **73**(1990), 97–105.

[4] 藤井・宝崎・金田，日本ＯＲ学会1991年度春季研究発表会アブストラクト集(1991)，104–105.

[5] 藤井・金田，日本ＯＲ学会1991年度秋季研究発表会アブストラクト集(1991)，62–63.

[6] 関根，ＰＥＲＴ・ＣＰＭ入門，日科技連，1983.