

DEAにおける拡張クロス効率値を用いた感度分析法

01505910 慶應義塾大学 枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

DEAの効率性尺度は相対的であるので、その効率値は評価対象範囲に含まれるDMU、特にD効率的なDMUの影響を受ける。特別に優れたDMUが存在すると、あるDMUは、その影響で低い効率値をとる可能性が高い。その特別に優れたDMUが存在しなければ(または評価対象範囲に含まれなければ)、その優れたDMUを参照しているDMUの効率値は高くなるかもしれない。これは、DMUの評価対象範囲をどのように決めるかという、あまり今までDEAの問題としては取り扱われていない問題である¹。この問題を解決しない限り、評価される対象DMUは、例えば、「優れたDMUさえいなければ、もっと良い評価が得られるのに」という不満を持つかもしれない。このような不満を持つDMUに対しても、DMUの存在による影響(感度)に関する情報を調べることによって、適切な評価を与えることが本研究の目的である。

そこで、本研究ではDMUの評価対象範囲の変化が対象DMUの評価に対して、どの程度影響を与えるかを見ることのできる方法論(感度分析法)を提案し、この問題に対応するための情報を与え、評価に利用することを目的とする。具体的には、Andersen et al. [1]のExtended DEA Measure(以降、拡張D効率値と呼ぶ)にクロス評価の考え方を導入する。拡張クロス効率値とクロス感度分析法という新しい概念を導入することで、DMUの評価対象範囲の問題に対応するための情報および評価法を与える。

2 拡張効率性評価

【記号の説明】

m, k, n : 入力、出力数、DMUの数
 X, Y : 入力、出力値行列 ($X \in R^{m \times n}$, $Y \in R^{k \times n}$)
 λ_j : DMU j の参照係数(変数)
 s_i^-, s_r^+ : 入力 i 、出力 r のスラック変数
 θ_a^* : DMU a のD効率値

2.1 拡張D効率値

拡張D効率値 δ_a^* は、D効率的なDMUにとって効率性を悪化させてもD効率であり続けることができる倍率を表す²。DMU a がD効率な場合、 $\delta_a^* \geq 1$

¹DEAでは、DMUの入出力値から作られる生産可能集合は実行可能であることを前提に議論するが、この問題はそれ以前に設定されるべき問題である。

²拡張D効率値を求めるための定式化は、2.2節の問題ECPの b を a に変更すれば同じ定式化になるので、紙面の都合上省略する。

になる。DMU a がD非効率な場合、拡張D効率値とD効率値は等しい($\delta_a^* = \theta_a^*$)。

2.2 拡張クロス効率値

DMU a の拡張D効率値 δ_a^* は、別の見方をすれば、「DMU a が存在しないと考え、他のDMUによってDMU a を評価する場合の効率値」と考えることもできる。存在しないと考えるDMUを(効率的な)DMU b に変えることによって、本研究で取り扱いたい問題を解決できる。「(効率的な)DMU b が存在しないと考える場合の対象DMU a の効率性の評価値」 $\delta_{a,b}$ を拡張クロス効率値(Extended DEA Cross-Efficiency Measure)と定義し、問題ECPを解くことにより求める。

【ECP】

$$\min \delta_{a,b} \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \delta_{a,b} \cdot X_{i,a} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^n X_{i,j} \cdot \lambda_j + s_i^- \quad (2)$$

$$(i = 1, \dots, m)$$

$$Y_{r,a} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^n Y_{r,j} \cdot \lambda_j - s_r^+, \quad (r = 1, \dots, k) \quad (3)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^n \lambda_j = 1 \quad (4)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n, j \neq b) \quad (5)$$

$$s_i^- \geq 0, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (6)$$

$$s_r^+ \geq 0, \quad (r = 1, \dots, k) \quad (7)$$

$$\delta_{a,b} \text{ は符号無制約} \quad (8)$$

拡張クロス効率値の特徴を以下にまとめる³。

1. $\delta_{a,b}^* \geq \theta_a^*$
2. $a = b$ ならば、 $\delta_{a,a}^* = \theta_a^*$ 。
3. DMU b がD非効率な場合、 $\delta_{a,b}^* = \theta_a^*$ 。DMU b は、D効率なDMUのみを考えればよい。
4. E_a をDMU a の参照集合とすると、 $b \notin E_a$ であれば、 $\delta_{a,b}^* = \theta_a^*$ 。問題ECPは、対象DMU a に対して、 $b \in E_a$ となるDMU b のみ解けばよい。
5. D効率なDMU a の拡張クロス効率値は、 $a = b$ ならば1以上、 $a \neq b$ ならば、1になる。
6. 拡張クロス効率値は行に対象DMU a 、列にD効率なDMU b とD効率値を記述する行列として

³DMU a は対象DMU、DMU b は存在しないと考えるDMU。

書ける(拡張クロス効率性行列と呼ぶ)。

2.3 簡単な数値例および図解

表 1: 数値例: 2入力, 1出力, 5DMU

	入力1	入力2	出力
DMU A	1.5	8.0	1.0
DMU B	2.5	5.0	1.0
DMU C	4.0	2.5	1.0
DMU D	7.0	6.0	1.0
DMU E	10.0	3.0	1.0

表 2: 拡張クロス効率性行列

対象 DMU(a)	取り除く DMU(b)			D 効率値
	DMU A	DMU B	DMU C	
DMU A	1.667	1.000	1.000	1.000
DMU B	1.000	1.076	1.000	1.000
DMU C	1.000	1.000	1.589	1.000
DMU D	0.519	0.528	0.720	0.519
DMU E	0.833	0.833	1.000	0.833
クロス平均	0.838	0.840	0.930	
拡張D 効率値	1.667	1.076	1.589	

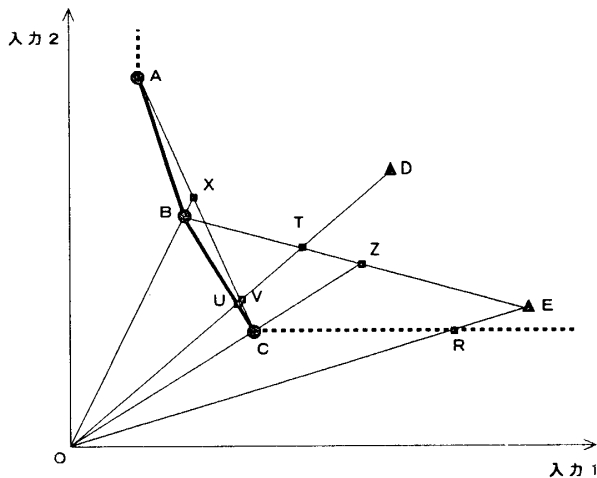


図 1: 拡張クロス効率値の図解

(例) 対象DMU: DMU D

$$\delta_{DA}^* = \frac{OU}{OD}, \quad \delta_{DB}^* = \frac{OV}{OD}, \quad \delta_{DC}^* = \frac{OT}{OD}$$

3 クロス感度分析法

拡張クロス効率値のD効率値に対する比は、効率的なDMUの存在による影響(感度)を表す指標と考えることができる。そこで、(9)式で表す指標 $S_{a,b}^*$ (%) をクロス感度(DEA Cross-Sensitivity)と呼ぶ。

$$S_{a,b}^*(\%) = \left(\frac{\delta_{a,b}^*}{\theta_a^*} - 1 \right) \times 100(\%) \quad (9)$$

クロス感度 $S_{a,b}^*$ はDMU b が存在しないと考える(取り除く)ことによる効率性の変化の大きさ(倍率)を表す。また、特に $a=b$ のクロス感度 $S_{a,a}^*$ をDMU a のセルフ感度(DEA Self-Sensitivity)と呼ぶ。

表 3: クロス感度(%: 数値例)

	取り除く DMU(b)			平均
	DMU A	DMU B	DMU C	
DMU A	66.67	0.00	0.00	
DMU B	0.00	7.62	0.00	
DMU C	0.00	0.00	58.88	
DMU D	0.00	1.77	38.83	13.53
DMU E	0.00	0.00	20.00	6.67
クロス平均	0.00	0.44	14.71	
セルフ感度	66.67	7.62	58.88	

4 数値例(5入力, 2出力, 23DMU)

【結果】紙面の都合上、当日示す。

5 スラックを考慮した拡張クロス効率値およびクロス感度分析法

拡張クロス効率値はスラックを考慮していないため、効率性を過大評価すると同時にスラックを考慮しないことにより、各DMUの評価に不公平を生じさせる可能性がある。そこで、枇々木 [2] の2段階線形計画問題によるS効率値(スラック調整済D効率値)の考え方を拡張クロス効率値へ応用することにより、スラックを考慮した評価法を考えることができる。

※ 詳しい定式化などは、紙面の都合上、当日示す。

6 おわりに

本研究では、拡張D効率値の考え方を応用した拡張クロス効率値を示し、評価対象範囲に含まれるDMUの存在に対する感度分析法を提案した。評価対象範囲に含まれるDMUの存在が効率値に与える影響を示すことにより、DEAを利用して評価を行う場合に有益な情報を与えることができる方法を示すことができた。

参考文献

- [1] P.Andersen and N.C.Petersen : A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis, Management Science, Vol.39, No.10(1993), pp.1261-1264.
- [2] 枇々木規雄: DEAにおけるスラックを考慮した効率性の評価法, オペレーションズ・リサーチ, Vol.40, No.12(1995), pp.686-690.