

リコールの可否が制御できる最適停止問題

02202090 筑波大学 齋藤毅 SAITO Tsuyoshi

1. はじめに

本研究では、各時点に現れるオファーの将来におけるリコールの可否が、オファーの価値に応じたある金額を払うことによって制御できるという最適停止問題を考える。以下、家の購入問題を例に問題状況を説明する。

ある人が今日から30日以内に家を1軒買わなければならないとする。見つけられる家は1日につき1軒だけであり、1軒の家を見つめるためには s 円（探索費用）が必要である。見つかる家の価値は最低で a 、最高で b であり、ある既知の分布 F にしたがうものとする。なお、家の価値とは価格や交通の便等を評価した値であり、その単位は探索費用と同じであるとする。

ここで、価値 w の家に対して $d(w)$ 円（予約費用）を払えば将来この家をリコールできる（予約できる）と仮定する。ところで、買う家は1軒だけであるから、どの時点においても予約した家すべてを記憶しておく必要はなく、予約した家の中で最大価値のものだけを記憶していればよい。このような「現時点より前に予約した家の中で最大価値の家」をリーディングオファー（leading offer）と呼ぶ。また「現時点で見つけた家」をカレントオファー（current offer）と呼ぶ。なお、家を予約する場合や買う場合、その家の価値がリーディングオファーの価値を上回っていない必要はないことは言うまでもない。

さて、家の検分を終えた後、彼は次の4つの決定のいずれかを下さなければならない。

1. その家を買う (A). 2. その家を予約する (R). 3. その家は見送り、リーディングオファーを買う (PS). 4. その家は見送り、家探しを続ける (PC). (各決定の記号は Accept,

Reserve, Pass up, Stop, Continue からつけたものである) 本研究の目的は、このような問題における最適決定ルールの構造を研究することである。

ただし、予約しなかった家のリコールは許されず、予約はしたが買わなかった家に払った予約費用は返ってこないものとする。また、予約費用は家の価値の増加関数であるとする。探索開始時点で予約されている家はないとする。

2. 基本方程式

次のように $u_t(x, w)$ と $v_t(x)$ を定義する。

$u_t(x, w)$: リーディングオファー x を持ち、カレントオファー w を得た時点 t から探索を始め、それ以降を最適決定ルールにしたがった場合の総期待利益。

$v_t(x)$: $u_t(x, w)$ の w に関する期待値、すなわち

$$v_t(x) = \int_a^b u_t(x, w) dF(w). \quad (1)$$

このとき $u_t(x, w)$ は次のように表すことができる。なお、時点 t は最終時点を0として、後ろ向きにとっている。

$$u_t(x, w) = \max \left\{ \begin{array}{l} w, \\ -d(w) - s + \beta v_{t-1}(w), \\ x, \\ -s + \beta v_{t-1}(x) \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$u_0(x, w) = \max\{A: w, PS: x\} \quad (3)$$

(2)式は $t \geq 1$ のもので、括弧内の各式は順に決定A, R, PS, PCを取った場合の総期待利益を表している。 β は1期間当たりの割引率($0 < \beta \leq 1$)である。

3. 最適決定ルール

各時点での状態はリーディングオファー x とカレントオファー w との組 (x, w) である。よって各時点における最適決定ルールは図1のように (x, w) -平面を4分割したものと表すことができる。(図1は $a = 0, b = 1$, 分布 F が一様分布, 予約費用は図2に示した関数である場合の時点1における最適決定ルールであり, 横軸がリーディングオファー, 縦軸がカレントオファーの価値を表す.)

これは, 例えばリーディングオファーが x_2 の場合, カレントオファーが w_1 未満ならば決定 PC, w_1 以上 w_2 未満ならば決定 R, w_2 以上ならば決定 A と決めることが最適である, と見る。

また, リーディングオファーが x_1 の場合, 決定 PC と決定 R とが交互に現れる区間がある。このように決定 PC と R との境界が複数個存在することがある場合, 最適決定ルールは MRV(Multi Reservation Value) 性を持つと呼ぶ。

4. 結論

- (a) 予約した家を買うこと (決定 PS) が最適決定となる可能性があるのは最終時点においてのみである。(決定 PS と PC との境界は時点に無関係であり, 決定 A と R との境界より常に大きい.)
- (b) 最適決定ルールが MRV 性を持つかどうかは予約費用関数の形状によって決まる。(予約費用関数が凹関数の場合には最適決定ルールは MRV 性を持たない.)
- (c) 予約領域 (図1の R の領域) は最終時点に近づくにつれて大きくなる。また, 最終時点まである期間以上残っている時点においては予約領域が存在しない。
- (d) 予約費用が高いほど予約領域は小さくなる。

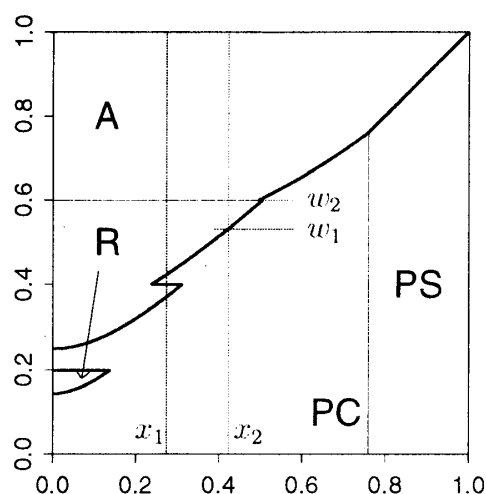


図1. 最適決定ルール

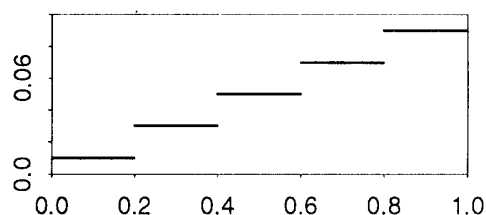


図2. 予約費用関数

5. 参考文献

- [1] Ikuta, S. (1994). Markovian Decision Processes and Its Application of Economic and Managerial Problems, Unpublished lecture note.
- [2] Ikuta, S. (1995). The Optimal Stopping Problem with Several Search Areas, *Journal of Operations Research Society of Japan*, 38.1, 89-106.
- [3] Saito, T. (1996). Optimal Stopping Problem with Controlled Recall, Discussion Paper No.682, Institute of Socio-Economic Planning, University of Tsukuba.
- [4] Sakaguchi, M. (1961). Dynamic Programming of Some Sequential Sampling Design, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2, 446-466