1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

連立非線形方程式に対する一般Steffensen反復法

01400943 富山県立大学 野田竜夫 NODA Tatsuo

1. Steffensen 反復法

$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)(i=1,2,\ldots,n)$ は R^n における領域 D で定義された実数値非線形関数とし,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in R^n,$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^t \in R^n$$

とおく。[1],[2] と同様に, 連立非線形方程式

(1.1) $x = f(x)$

を扱う。(1.1) の解を $\overline{x}$ とする。記号は [1],[2] にしたがい, 次のようにおく。

$$\|x\| = \max_{1\le i\le n} |x_i|, \qquad \|A\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$f^{(0)}(x) = x, \qquad f^{(i)}(x) = f(f^{(i-1)}(x)) \quad (i=1,2,\ldots),$$

$$d^{(0,k)} = x^{(k)} - \overline{x}, \qquad d^{(i,k)} = f^{(i)}(x^{(k)}) - \overline{x} \quad (i=1,2,\ldots),$$

$$\Delta x(x) = f^{(1)}(x) - x,$$

$$\Delta X(x) = (f^{(1)}(x) - x, \ldots, f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)),$$

$$\Delta^2 X(x) = (f^{(2)}(x) - 2f^{(1)}(x) + x, \ldots, f^{(n+1)}(x) - 2f^{(n)}(x) + f^{(n-1)}(x)).$$

ここで,$A = (a_{ij}), \Delta X(x)$ および$\Delta^2 X(x)$ は $n \times n$ 行列である。さらに,[1],[2] で述べたのと同じ条件 (A.1)–(A.5) を仮定する:

(A.1) $f_i(x)(1 \le i \le n)$ は Dで 2 回連続微分可能。

(A.2) (1.1) の解 $x = \overline{x}$が Dの中に存在する。

(A.3) $n\times n$ 行列 $J(x)$ を $J(x) = (\partial f_i(x)/\partial x_j)$ $(1 \le i, j \le n)$ によって定義するとき,$\|J(\overline{x})\| < 1$.

(A.4) $k = 0,1,2,\ldots$ に対して,n 個のベクトル $d^{(0,k)}, d^{(1,k)}, \ldots, d^{(n-1,k)}$は 1 次独立である。

(A.5) $D(x^{(k)}) = (d^{(0,k)}, d^{(1,k)}, \ldots, d^{(n-1,k)})$ とおくとき

$$\inf\{|\det\ D(x^{(k)})| / \|d^{(0,k)}\|^n\} > 0.$$

われわれは [1] において,Steffensen 反復法

$$(1.2)\quad x^{(k+1)} = \begin{cases} x^{(k)} - \Delta X(x^{(k)})[\Delta^2 X(x^{(k)})]^{-1} \Delta x(x^{(k)}) & \text{for } x^{(k)} \ne \overline{x} \\ x^{(k)} & \text{for } x^{(k)} = \overline{x} \end{cases}$$

について考察し, 次の定理を証明した。

定理 1. 条件 (A.1)–(A.5) のもとで, 反復法 (1.2) を考える。$\overline{x}$に十分近い $x^{(k)}$に対して, 適当な定数 $M_1 > 0$ をとれば

$$\|x^{(k+1)} - \overline{x}\| \le M_1 \|x^{(k)} - \overline{x}\|^2$$

が成り立つ。

2.　一般 Steffensen 反復法

Steffensen 反復法 (1.2) の実際計算で,$n \times n$ 行列 $[\Delta^2 X(x^{(k)})]^{-1}$をその正則近似行列 $H(x^{(k)})$ で置き換えた反復法

(2.1) $$x^{(k+1)} = \begin{cases} x^{(k)} - \Delta X(x^{(k)})\, H(x^{(k)})\, \Delta x(x^{(k)}) & \text{for } x^{(k)} \neq \overline{x} \\ x^{(k)} & \text{for } x^{(k)} = \overline{x} \end{cases}$$

が考えられる。これを一般 Steffensen 反復法とよぶことにする。

[2] において, 一般 Steffensen 反復法 (2.1) について考察し, 次の定理を証明した。

定理 2. 条件 (A.1)-(A.5) のもとで, 反復法 (2.1) を考える。$\overline{x}$ に十分近い $x^{(k)} \in U(\overline{x}) - \{\overline{x}\}$ に対して, 適当な定数 $M_2 > 0$ をとれば

$$\|x^{(k+1)} - \overline{x}\| \leq M_2 \|x^{(k)} - \overline{x}\|^2 \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

が成り立つ。

3.　$H(x^{(k)})$ の構成

$n \times n$ 行列 $C = (c_{ij})$ を任意にえらび固定する。次の仮定をおく:

(3.1) $|c_{ij}| < \dfrac{1}{n} \qquad (1 \leq i, j \leq n).$

$\|C\| < 1$ であることから, 任意の $x^{(k)} \in U(\overline{x}) - \{\overline{x}\}$ に対して

(3.2) $C = I - \Delta^2 X(x^{(k)}) X^{(0)} \qquad$ (Iは $n \times n$ の単位行列)

を満たす $n \times n$ 行列 $X^{(0)} = X(x^{(k)})$ を求める。さて,$X^{(0)}$から出発して, 反復法

(3.3) $X^{(p+1)} = X^{(p)}[2I - \Delta^2 X(x^{(k)}) X^{(p)}] \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$

をつくる。条件 (3.1),(3.2) および (3.3) のもとで

$$X^{(p)} = [\Delta^2 X(x^{(k)})]^{-1}(I - C^{2^p}) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$X^{(p)} \to [\Delta^2 X(x^{(k)})]^{-1} \qquad (p \to \infty)$$

となることが示される。十分小さい定数 $\varepsilon > 0$ を与える。$\max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |x_{ij}^{(p+1)} - x_{ij}^{(p)}| < \varepsilon$ならば, $H(x^{(k)}) = X^{(p)}$ とおく。ここに,$X^{(p)} = (x_{ij}^{(p)})(1 \leq i, j \leq n)$ である。

参考文献

[1] T.Noda, *The Steffensen iteration method for systems of nonlinear equations*, Proc. Japan Acad., **60**, Ser.A, 18-21 (1981).

[2] —, *A general Steffensen iteration method for systems of nonlinear equations*, (to appear in Math. Japon.).