

可積分な差分方程式を利用した Bass モデルのパラメータ推定

01206600 NTT マルチメディアネットワーク研究所 *佐藤 大輔 SATOH Daisuke
01009980 NTT マルチメディアネットワーク研究所 井上 正之 INOUE Masayuki

1 はじめに

Bass モデルは、耐久消費財の新製品売り上げ数の時間的経過をモデル化した代表的なモデルである [1]。Bass モデルのパラメータ推定方法には、離散モデルについての最小二乗法 (OLS), 最尤法 (MLE), 非線形推定法などがあげられる。これらの内 OLS は、微分方程式を差分化し、最小二乗法によりパラメータを推定する方法である。OLS は簡単な手法であり、データを入手するごとに推定値を修正するアダプティブ推定にも利用される重要な手法である。しかし共線性による推定値の不安定性などの問題点も指摘されている。

一方、非線形の孤立波を記述した方程式 (ソリトン方程式) の研究において、もとの微分方程式の性質 (可積分性) を保存するような差分法が研究されている。この差分方程式は、厳密解をもち、差分間隔 0 の極限において元の微分方程式に一致するものである。

本報告では、Bass モデルのパラメータ推定において、可積分な差分方程式を利用することにより、信頼度を向上させ、OLS の共線性の問題点を改善する手法を提案する。

2 離散モデルについての最小二乗法

Bass モデルは次のような方程式である。

$$\frac{du}{dt} = p(m - u) + qu(m - u) \quad (1)$$

ここで、

$u(t)$: 時刻 t までの累積採用者数
 m : 飽和需要量
 p : 革新係数
 q : 模倣係数

である。

OLS では (1) を前進差分した差分方程式に書

き直す。

$$u_{t+\delta} - u_t = \delta[p(m - u_t) + qu_t(m - u_t)] \quad (2)$$

ここで、

$$\delta = 1$$

$$S_t = u_{t+1} - u_t$$

として (2) 式を u_t について書き直し、誤差項を入れ、次のような回帰式とみなして最小二乗法でパラメータを推定する。

$$S_t = \alpha_1 + \alpha_2 u_t + \alpha_3 (u_t)^2 + \varepsilon_t \quad (3)$$

ここに、

$$\alpha_1 = pm$$

$$\alpha_2 = mq - p$$

$$\alpha_3 = -q$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_0 = 0$$

3 Bass-model と可積分な差分方程式

(1) 式は、可積分な方程式であり、次のような厳密解を持つ。

$$u(t) = m \left(\frac{1 - \exp[-(p + mq)t]}{1 + \frac{mq}{p} \exp[-(p + mq)t]} \right) \quad (4)$$

(1) 式は可積分性を保つように差分化される [2]。

$$u_{t+\delta} - u_{t-\delta} = 2\delta[a + b(u_{t+\delta} + u_{t-\delta}) + cu_{t+\delta}u_{t-\delta}] \quad (5)$$

ここで、

$$a = mp$$

$$b = \frac{1}{2}(mq - p)$$

$$c = -q$$

であり、次のような厳密解を持つ。

$$u_t = \frac{C_+ + C_- \exp[\Omega(t - t_0)]}{1 + \exp[\Omega(t - t_0)]}$$

$$C_{\pm} = \frac{1}{2q}(mq - p \mp |mq + p|)$$

$$\tanh(\delta\Omega) = \delta|mq + p|$$

ここで、 $m, p, q > 0$ であるから

$$t \rightarrow \infty \text{ で } u_t \rightarrow m \quad (6)$$

となることがわかる。つまり、任意のパラメータの値、差分間隔で数値計算によって m が変化することはないことがいえる。

4 前進差分と可積分な差分との比較

2つの差分法により数値計算したものを図1,2に示す。ここで、

$$\delta = 1, m = 100, p = 0.01, q = 0.0195 \quad (7)$$

である。前進差分の方は、元の微分方程式の形を崩してしまっているのに対して、可積分な差分法では、形が崩れていないことがわかる。

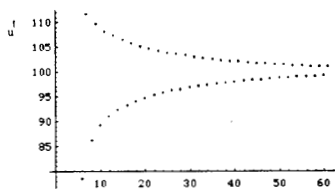


図 1: 前進差分による数値計算

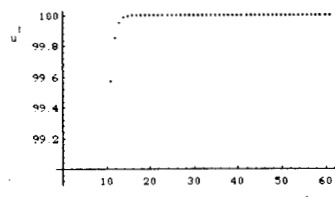


図 2: 可積分な差分による数値計算

5 可積分な差分方程式のパラメータ推定への利用

(3)式は(4)式を利用することで次の式に置き換えられる。

$$S_{t+1} = 2\delta[a + b(u_{t+\delta} + u_{t-\delta}) + cu_{t+\delta}u_{t-\delta}] \quad (8)$$

(3)式において $u_t, (u_t)^2$ の二つの項で、それぞれの項を独立に変化させることはできない。それに対して(8)式の第2項、第3項においては、どちらかの項の値を固定してもう一方の項の値を変化させることが可能である。このように(8)式は(3)式よりも共線性が生じにくいことがわかる。

6 まとめ

Bass モデルにおいて可積分な差分法を用いたパラメータ推定法を提案した。この手法は、従来手法の欠点である共線性の問題を改善している。また、差分方程式が厳密解をもつため、任意のパラメータの値、差分間隔に対して飽和需要量が不変であることを保証している点で優れているといえる。また、Logistic モデルについても同様に可積分な差分方程式を利用したパラメータ推定が可能である。

参考文献

- [1] V.Mahajan, E.Muller and F.M.Bass: "New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research". *Journal of Marketing Research*, 54 (1990) pp.1-26.
- [2] R.Hirota: "Nonlinear Partial Difference Equations. V. Nonlinear Equations Reducible to Linear Equations", *Journal of the Physical Society of Japan*, 43 (1979) pp.312-319.