

単位正方形内の L_1 距離の p -メディアン問題

02202203 南山大学 *榊原 賢治 SAKAKIBARA Kenji

01204223 南山大学 鈴木 敦夫 SUZUKI Atsuo

1 はじめに

単位正方形内で利用者が連続的に分布している場合に、 p 個の施設をその正方形内に配置する問題を考える。利用者は L_1 距離で最も近い施設を利用すると仮定する。このような問題は p -メディアン問題として知られており、ネットワーク上の問題や平面上でも利用者が離散的に分布している問題は研究が進んでいる [1]。ここで扱う単位正方形内の p -メディアン問題については、ユークリッド距離の場合、[2] でポロノイ図を繰り返し構成する反復解法が示されている。 L_1 距離の場合は、効率的な L_1 ポロノイ図の構成算法がなかったため、今迄研究されていなかった。ところが、ポロノイ図のより優れた算法が [5] で提案され、我々の研究グループでもその算法にならない、 L_1 ポロノイ図を構成するプログラムを作成した [3]。我々は単位正方形内の L_1 距離の p -メディアンを L_1 ポロノイ図を用いて定式化し、[3] のプログラムを用いた反復解法を示す。数値実験の結果、この解法で実用的な規模の問題を解くことができることがわかった。

2 L_1 ポロノイ図

ポロノイ図とは平面上の各施設の利用圏を表した幾何図形である。 p 個の施設 $P_1(x_1), \dots, P_p(x_p)$, $(x_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, p)$ が与えられた時に、 $P_i(x_i)$ の利用圏 V_i は、

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} \{P | d(P, P_i) < d(P, P_j)\}, \quad (1)$$

で表される。ここで $d(P, P_i)$ は任意の地点 P と施設 P_i の距離を表す。 L_1 ポロノイ図の場合、

$$d(P, P_i) = |x - x_i| + |y - y_i|, \quad (2)$$

である。 $P_1(x_1), \dots, P_p(x_p)$ は母点と呼ばれる。図 1 は 100 個の母点に対する L_1 ポロノイ図の例である。

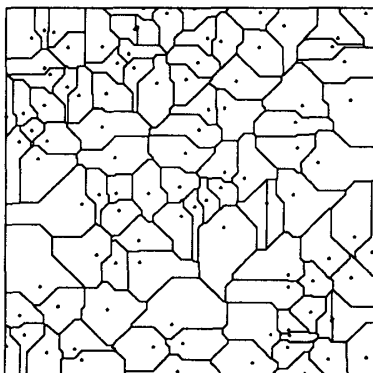


図 1: L_1 ポロノイ図の例

3 問題の定式化と偏微分係数の計算

単位正方形 S 内の p 個の施設を $P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_p(x_p)$ とする。ユークリッド平面上の $P(x)$ の位置にいる利用者が施設 $P_i(x_i)$ を利用するための費用は、利用者と施設との間の L_1 距離とする。利用者は必ず費用の最も小さい施設を利用すると仮定すると、各施設の勢力圏は各施設 $P_i(x_i)$ を母点とするポロノイ領域となる。以上のように仮定すると利用者の総費用は

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_p) &= \int_S d(P, P_i) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{V_i} d(P, P_i) dx dy \quad (3) \end{aligned}$$

で表される。したがって、施設の数 p が与えられた時、利用者の総費用を最小にする問題は (3) 式の目的関数を最小にする施設的位置 $P_1(x_1), \dots, P_p(x_p)$ を求めるという問題として定式化される。

目的関数 (3) を偏微分すると、

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -(|V_i^{x+}| - |V_i^{x-}|) \quad (4)$$

となる。ただし、 $V_i^{x+(-)} = \{P | P \in V_i, x > (<) x_i\}$ である。 $|V_i^{x+}|$ は V_i^{x+} の面積を表している。したがって、 $\nabla F = 0$ となる点は、各ポロノイ多角形でメディアンになる。

4 反復解法

適当な初期配置から出発し、各ポロノイ多角形内の 1-メディアンの位置に母点を移動する。これを繰り返すことで収束解を求める。この反復の際に目的関数が単調に減少することがわかる。ただし、ここで得られる解は必ずしも最適解とはならない。

反復手順

- 1: p 点の初期配置 $x_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}$ を決定し、 $\nu=0$ とする。
- 2: $x_1^{(\nu)}, \dots, x_p^{(\nu)}$ に対する L_1 ポロノイ図を作成し、各母点 $x_i^{(\nu)}$ ($i=1, \dots, p$) に対して 3-1 から 3-4 の操作を行なう。
- 3-1: ポロノイ多角形の頂点を列挙し、その面積 S を求める。
- 3-2: x 方向に関して、以下に述べる探索手順を用い、多角形の面積を $S/2$ ずつに分割する、 y 軸に平行な直線 $x = x_i^{(\nu+1)}$ を求める。
- 3-3: y 方向に関して 3-2 と同様の方法で $y = y_i^{(\nu+1)}$ を求める。

3-4: $x_i^{(\nu+1)} = (x_i^{(\nu+1)}, y_i^{(\nu+1)})$ とする. ($x_i^{(\nu+1)}$ はこのポロノイ多角形の1-メディアン.)

4: 3で求めた $x_i^{(\nu+1)}$ ($i = 1, \dots, p$) をそれぞれのポロノイ多角形の新しい母点とする.

5: 終了条件を満たせば終了, さもないならば $\nu := \nu + 1$ として2へ.

探索手順

1: ポロノイ多角形上の列挙した頂点を x 方向について昇順に整列し, その x 座標を x_1, x_2, \dots, x_m とする. $k := 1$ とする.

2: y 軸に平行な直線 $x = x_k$ と $x = x_{k+1}$ の間のポロノイ多角形の面積を計算し S' とする. $S_1 := S_1 + S'$ とする.

3: $S_1 = S/2$ ならば終了. $x = x_{k+1}$ とする. $S_1 < S/2$ ならば $k := k + 1$ として2へ. $S_1 > S/2$ ならば x_k と x_{k+1} の間で2分探索を行ない, $S_1 = S/2$ となる y 軸に平行な直線 $x = x'$ を求める.

5 数値例

初期配置は一様乱数を用いて与え, 反復の終了条件は,

$$\max_i \{ \max\{|x_i^{(\nu+1)} - x_i^{(\nu)}|, |y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)}|\} \} \leq 10^{-5}$$

とした. なお, プログラムは, Pascal で作成した. コンパイル時の最適化レベルは2である. 実験に使用した計算機はFUJIXEROX Argoss 5250 (SPARC station2 相当), OSはSun-OS 4.1.2である. この実験により, $p = 32$ の時に得られた解の一例を図2に示す. 図3に $p = 32$ の一例の, 反復回数と目的関数の減少の様子を示した. 表1は母点の数を $2^4, \dots, 2^8$ と増加させた時に, 反復が終了する反復回数と計算時間とを表している. 表の中の値はそれぞれ5通りの初期配置から出発した時の平均をとったものである.

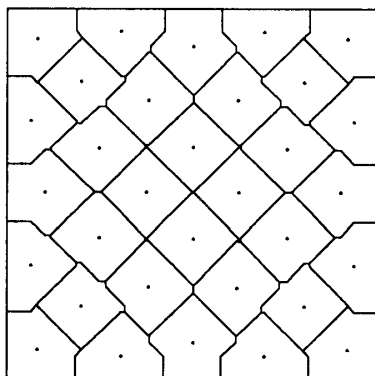


図2: 収束解 ($p=32$)

この実験の結果から次のようなことが観察できる.

- 母点数の増加に対して, 計算時間はほぼ線形に増加する.
- ポロノイ図の作成時間の比率は母点数が増加するにつれて大きくなる.

- 目的関数の値は反復により単調に減少する.

上の結果から, 母点の増加に対して, 母点を移動する計算時間の増加はポロノイ図の作成時間の増加と比較して, 少ないことがわかる.

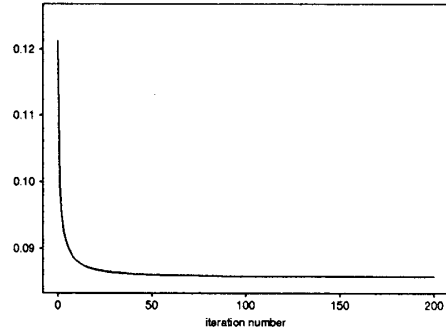


図3: 目的関数値の変化 ($p=32$)

表1: 反復が停止するまでの計算時間

p	反復回数	計算時間		
		for the Voronoi	total	rate
2^4	338	39.248	61.449	0.64
2^5	419	82.399	119.420	0.69
2^6	556	207.285	278.964	0.74
2^7	436	328.854	420.784	0.78
2^8	508	803.936	993.780	0.81

参考文献

- [1] P. Hansen, M. Labbé, D. Peeters and J-F. Thisse: "Facility Location Analysis", *Systems of Cities and Facility Location*, Harwood Academic Press, Chur, pp.1-70, 1987.
- [2] M. Iri, K. Murota and T. Ohya: "A Fast Voronoi Diagram Algorithm with Applications to Geographical Optimization Problems", *Proceedings of the 11th IFIP Conference on System Modeling and Optimization*, Copenhagen, 1983, *Lecture Note in Control and Information Science*, Vol.59, Springer-Verlag, Berlin, pp.273-288, 1984.
- [3] 松山訓子, 水谷友紀: " L_1 ポロノイ図の構成算法の研究", 南山大学経営学部情報管理学科卒業論文, 1995.
- [4] K. Sakakibara, K. Matsuyama and A. Suzuki: "Error Free L_1 -Voronoi Diagram Construction Algorithm and Its Application to p -median Problem of L_1 Distance in a Unit Square", *Studies in Computational Analysis*, Issue 9, pp.113-116, 1996.
- [5] K. Sugihara and M. Iri: "A Robust Topology-Oriented Incremental Algorithm for Voronoi Diagrams", *International Journal of Computational Geometry & Applications*, Vol.4, No.2, pp.179-228, 1994.