各入出力項目の生産関数を考慮したDEAモデル

申請中　東京理科大学　友田 光哉* TOMODA Mitsuya
01401450　東京理科大学　沼田 一道　NUMATA Kazumiti

1. はじめに

DEA(Data Envelopment Analysis) [1] は，多入力多出力体 (DMU:Decision Making Unit) における相対的な効率評価手法である．DEA では効率を一つの指標として表すことができるとともに，非効率的な DMU が効率的となるためには入力をどの程度削減すれば良いのか，または出力をどの程度増加させればよいのか，といった改善目標も提示することができる．改善目標の基準となるのは，DMU 同士の組合せからできる生産可能領域の境界面である．この境界面を生産関数と呼ぶ．DEA には入力と出力の関係を表す生産関数の型により，規模のリターンが逓減な BCC モデルと規模のリターンが一定な CCR モデルとがある．分析の際には，各入出力項目の関係を見てどちらか一方のモデルで分析する．もしくは，両方のモデルで分析してみて両方の効率値を基に評価するといった方法がとられている．しかし，各入出力項目の関係は BCC，CCR 両方の型が混在している場合も考えられる．そこで本発表では，各入出力項目の規模のリターンを考慮したモデルを提案する．

2. 既存のモデル

DEA の基本モデルである BCC モデルと CCR モデルは以下のように定式化される．

【記号の定義 1】

o	:	分析する DMU の番号 $(o=1,2,\cdots,n)$
n	:	DMU の総数
m	:	入力項目数
s	:	出力項目数
X_{ij}	:	DMU$_j$の入力 i の値
Y_{rj}	:	DMU$_j$の出力 r の値
λ_{jo}	:	非負結合構成変数
θ_o	:	DMU$_o$の D 効率値

[1] 東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻
〒 162 東京都新宿区神楽坂 1-3
E-mail: *tomoda@ms.kagu.sut.ac.jp*

[BCC] $(o=1,2,\cdots,n)$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta_o \\
\text{s.t.} \quad & \theta_o \cdot X_{io} \geq \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\lambda_{jo} \quad (i=1,\cdots,m) \\
& Y_{ro} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_{rj}\lambda_{jo} \quad (r=1,\cdots,s) \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jo} = 1 \\
& \lambda_{jo} \geq 0 \qquad (j=1,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

[CCR] $(o=1,2,\cdots,n)$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta_o \\
\text{s.t.} \quad & \theta_o \cdot X_{io} \geq \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\lambda_{jo} \quad (i=1,\cdots,m) \\
& Y_{ro} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_{rj}\lambda_{jo} \quad (r=1,\cdots,s) \\
& \lambda_{jo} \geq 0 \qquad (j=1,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

BCC モデルと CCR モデルとの違いは，$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jo}=1$ という制約を課せるか否かの違いである．この制約を課せる BCC モデルは規模のリターンが逓減な生産関数に対応している．また，この制約のない CCR モデルは規模のリターンが一定の生産関数に対応している．

本発表では，各入出力項目の生産関数を考慮したモデルを提案する．

3. 提案するモデル

【記号の定義 2】

λ_{jo}	:	CCR を適用した方の非負結合構成変数
μ_{jo}	:	BCC を適用した方の非負結合構成変数

I_C : CCRを適用した入力項目
R_C : CCRを適用した出力項目
I_B : BCCを適用した入力項目
R_B : BCCを適用した出力項目

【提案するモデル】

[NT] $(o = 1, 2, \cdots, n)$

$$\min_{\alpha,\lambda,\mu} \quad \theta_o$$

$$\text{s.t.} \quad \theta_o \cdot X_{io} \geq \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\lambda_{jo} \quad (i \in I_C)$$

$$Y_{ro} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_{rj}\lambda_{jo} \quad (r \in R_C)$$

$$\theta_o \cdot X_{io} \geq \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\mu_{jo} \quad (i \in I_B)$$

$$Y_{ro} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_{rj}\mu_{jo} \quad (r \in R_B)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{jo} = 1$$

$$\lambda_{jo} = \alpha_o \mu_{jo} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\lambda_{jo} \geq 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\mu_{jo} \geq 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\alpha_o \geq 0$$

提案するモデルでは，各入出力項目の関係から規模のリターンが逓減ならBCCの，規模のリターンが一定ならCCRの生産関数を仮定する．また，$\lambda_{jo} = \alpha_o \mu_{jo}$の制約により改善の方向を統一している．

4. 数値例

$n = 12, m = 2, s = 1$

データの状況により以下のように仮定した．

- 入力1と出力1→BCC型
- 入力2と出力1→CCR型

NTモデルは非線形計画問題であるが，α_oをパラメトリックに変化させることにより，線形計画問題として扱うことができる．

【分析結果】

表1. 各モデルの効率値

DMU	BCCモデル	NTモデル	CCRモデル
1	0.597	0.597	0.483
2	0.823	0.823	0.768
3	0.639	0.630	0.451
4	1.000	1.000	0.358
5	1.000	1.000	0.790
6	0.910	0.820	0.604
7	0.399	0.370	0.139
8	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000
10	0.990	0.524	0.182
11	0.725	0.685	0.473
12	0.313	0.247	0.101

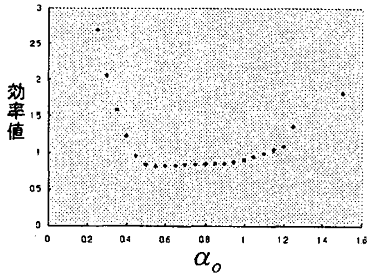

図.1. α_oと効率値の関係(DMU6)

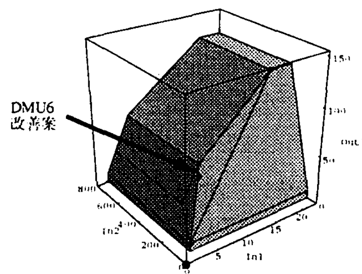

図.2. $\alpha_o = 0.55$の時のDMU6の改善案

5. おわりに

本発表では，DEAのBCCモデルとCCRモデルとをもとに，各入出力項目の生産関数を考慮したDEAモデルを提案した．このモデルは各入出力項目の生産関数を一つに決めずに分析が行なえるため，既存のモデルと比べて，よりデータを反映した分析を行なえる．

参考文献

[1] A.Charnes et. al. : *Data Envelopment Analysis, Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers(1994).

[2] 刀根 薫 : 「経営効率性の測定と改善」, 日科技連出版社,(1993).