1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

階層構造をもった都市施設の数を決めるための数理モデル

01107680　慶應義塾大学　栗田 治　KURITA Osamu

1. はじめに

都市施設の数を増やすと住民の移動距離を減らせるが，同時に建設・運営費を増加させる．既存の施設計画論(例えば[1])がこのトレード・オフにあまり注意を払っていないことに着目し，[2]では，交通費と建設・運営費の和を最小化するモデルを提案した．[2]は幾つかの想定の下で次の如き明示的な結論を得た：

> **施設建設・運営費が施設利用者の線形函数のとき，最適施設数は人口の2/3乗と都市面積の1/3乗とに比例する．**

本研究では新たにサービスの階層構造に着目する．例えば郵便局には，簡易郵便局・特定郵便局・普通郵便局の別があり，後者になるほど提供されるサービスの種類は豊富である．これをサービスの階層構造と呼ぼう．こうした階層構造をもった施設を考え，全階層の施設の数を同時に決定するためのモデルを[2]にならって作成する(目的函数は施設の建設・運営費と住民の交通費の和)．この問題の最適性の条件を吟味すると[2]と同様の明示的な結論が得られた．

2. 定式化

対象都市の面積をSとし，人口をPとする．そして

- **都市内で一様に分布する住民が，必要に応じて自ら最寄りの施設を訪れサービスを受ける**

と想定する．この都市に(1次・2次という)2段階の階層をもった施設を設けることにする(3段階以上の記述も同様に出来るが，理解し易い2段階の例で説明する)．いま2種類のサービスs_1，s_2があるものとし，j次の施設が提供するサービスの集合S_jが

$$S_1 = \{s_1\}, \quad S_2 = \{s_1, s_2\} \tag{1}$$

と与えられるものとしよう．すなわち$S_1 \subset S_2$なる階層構造を前提とする訳である．そして

$$m_j = (j\text{次施設の数}) \quad (j = 1, 2) \tag{2}$$

と定義する．ここで

$$n_i = (\text{サービス}s_i\text{を提供する施設の数}) \tag{3}$$

とすれば，定義により次式が成り立つ：

$$n_1 = m_1 + m_2, \quad n_2 = m_2. \tag{4}$$

次に施設の誘致圏に関して準備する．まず1次・2次合わせた$n_1 = m_1 + m_2$個の施設が都市内に均一に配置されているものとする．加えて，その内の$n_2 = m_2$個の施設も都市内に均一に配置されているものとしよう．都市計画分野の用語で言えば，"クリスタラーの中心地理論的な配置(例えば文献[3]のp.75)"を想定している訳である．そして便宜的に

- **サービスs_iを提供する施設の誘致面積は一律にS/n_iである$(i = 1,2)$**
- **i次以上の施設1つに割り当てられる，サービスs_iを受ける利用者の数は一律にP/n_iである$(i = 1,2)$**

の両者を想定する．さらに

$$\nu_i = (\text{住民1人が1年当たりにサービス}s_i\text{を必要とする回数})[\text{回}] \quad (i = 1, 2) \tag{5}$$

とし，次を記述しておく：

$$\begin{aligned} u_i &= (i\text{次以上の施設1つ当たりのサービス}s_i\text{を受ける延べ人数}) \\ &= \nu_i \times (P/n_i). \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{6}$$

2.1 施設建設・運営費

j次施設の年当たり建設・運営費p_jを，割り当てられる(各サービスの)客数の線形函数で与える：

$$p_1 = a_1 + b_1 u_1, \quad p_2 = a_2 + b_1 u_1 + b_2 u_2. \tag{7}$$

固定費a_jは，定額の運営費と用地・建設費の年当たり償還分(の現在価値)とを合算したものである．固定費は高次になるほど大きいのが自然である：

$$[\text{固定費に関する前提}] \quad a_1 < a_2. \tag{8}$$

b_iはサービスs_iを客1人に与えるための費用である．

都市全体での施設建設・運営費の総和Rを求めるには，p_1とp_2に施設数を乗じて合算すればよい：

$$\begin{aligned} R &= m_1 p_1 + m_2 p_2 \\ &= a_1 m_1 + a_2 m_2 + (\nu_1 b_1 + \nu_2 b_2) P. \end{aligned} \tag{9}$$

2.2 住民の交通費

議論を明解にするために，サービスs_iを与える施設の誘致圏を施設数n_iによらず相似と見做す．誘致圏のスケールは$\sqrt{S/n_i}$だから，住民から施設への平均距離を$\bar{r}(n_i)$[km]とおくと

$$\bar{r}(n_i) = \kappa \sqrt{S/n_i} \tag{10}$$

と表せる．定数κは，区の形状と施設位置に依存する．ちなみに区を正六角形と見做し，施設をその重心に置けば$\kappa = (4+3\ln 3)/(6\sqrt{6}\sqrt[4]{3}) \simeq 0.3772$である[4]．

さらに次を定義する：

$$\alpha = (\text{単位移動費})[\text{円/km}]. \tag{11}$$

住所と施設の間の往復距離の平均値は$2\overline{r}(n_i)$である．よって都市全体での，サービスs_iを受けるための交通費総額Q_iは次式の通り$(i=1,2)$：

$$Q_i = 2\overline{r}(n_i) \times \alpha \times \nu_i \times P = \frac{2\nu_i \kappa \alpha P \sqrt{S}}{\sqrt{n_i}}. \tag{12}$$

したがって住民が負担する交通費の総額をQとすると

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2\kappa\alpha P\sqrt{S}\left(\frac{\nu_1}{\sqrt{m_1+m_2}} + \frac{\nu_2}{\sqrt{m_2}}\right) \tag{13}$$

が得られる．

3．総費用の最小化問題

既に定式化したRならびにQを合算すると都市住民の総費用負担$T(m_1,m_2)$が与えられる：

$$T(m_1,m_2) = R + Q. \tag{14}$$

ここで最適化問題

$$(\text{問題}) \quad \text{minimize} \quad T(m_1,m_2)$$

の解を(m_1^*, m_2^*)としよう．m_1とm_2は本来非負整数であるが，本研究では構造を巨視的に記述したいので，便宜上これを連続変数として扱おう．そこでまず

$$B = \kappa\alpha P\sqrt{S} \tag{15}$$

と置いて，最適化のための1階の条件と2階の偏微係数を記述する：

$$\frac{\partial T}{\partial m_1} = a_1 - \nu_1 B(m_1+m_2)^{-\frac{3}{2}} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m_2} = a_2 - \nu_1 B(m_1+m_2)^{-\frac{3}{2}} - \nu_2 B m_2^{-\frac{3}{2}} = 0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial m_1^2} = \frac{3\nu_1 B}{2}(m_1+m_2)^{-\frac{5}{2}}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial m_2^2} = \frac{3\nu_1 B}{2}(m_1+m_2)^{-\frac{5}{2}} + \frac{3\nu_2 B}{2} m_2^{-\frac{5}{2}}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial m_1 \partial m_2} = \frac{3\nu_1 B}{2}(m_1+m_2)^{-\frac{5}{2}}. \tag{20}$$

(18)，(19)，(20)から，$m_1 > 0$かつ$m_2 > 0$のとき，$\partial^2 T/\partial m_1^2 > 0$かつ

$$|H| = \frac{\partial^2 T}{\partial m_1^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial m_2^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial m_1 \partial m_2}\right)^2 = \frac{9B^2\nu_1\nu_2}{4}\{m_2(m_1+m_2)\}^{-\frac{5}{2}} > 0 \tag{21}$$

となり，Tが凸函数であることが分かる．したがって，1階の条件(16)，(17)を満たす正のm_1^*とm_2^*を求められれば，それが大域的な最適解を与えることが分かる．(16)，(17)を機械的に解くと次式を得る：

$$m_1^* = \left\{\left(\frac{\nu_1\kappa\alpha}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\nu_2\kappa\alpha}{a_2-a_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} P^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{3}}, \tag{22}$$

$$m_2^* = \left(\frac{\nu_2\kappa\alpha}{a_2-a_1}\right)^{\frac{2}{3}} P^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{3}}. \tag{23}$$

3.1 結果の吟味

前提(8)によって$m_2^* > 0$は保証されるが，m_1^*の正値性はこのままでは保証の限りでない．そこで$m_1^* > 0$であるための条件を(22)に基づいて記すと

$$a_2/a_1 > 1 + \nu_2/\nu_1 \tag{24}$$

を得る．これが満たされない場合は$m_1 = 0$，つまり2次施設のみを建設・運営するのが得策となる．このときm_2は$m_1 \equiv 0$の下でTを最小化することにより

$$m_2^{**} = \left\{\frac{(\nu_1+\nu_2)\kappa\alpha}{a_2}\right\}^{\frac{2}{3}} P^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{3}}. \tag{25}$$

と得られる．優劣分岐点[5]の記述は次の通り(図1)：

1. **(固定費の比) > 1+(サービス回数の比)**
   ⇒ 1次施設 m_1^*個・2次施設m_2^*個の双方を設けるべし
2. **(固定費の比) < 1+(サービス回数の比)**
   ⇒ 2次施設m_2^{**}個のみを設けるべし

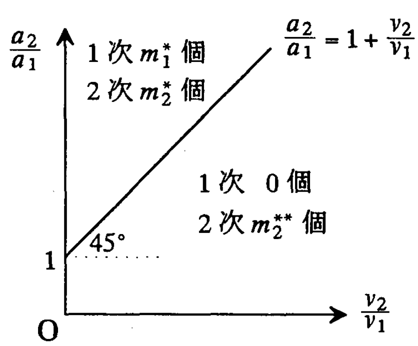

図1　2次施設のみならず1次施設をも建設するかどうかの優劣分岐(a_2/a_1とν_2/ν_1による記述)．

4．参考文献

[1] 柳澤　忠・谷村秀彦他(1984)：地域施設計画(新建築学大系21)，彰国社．
[2] 栗田　治(1996)：都市施設の数を決めるための数理モデル，日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集，1-D-11，pp.90-91．
[3] 都市計画教育研究会編(1995)：都市計画教科書(第2版)，彰国社．
[4] 栗田　治(1995)：不定形に関する距離分布の基礎，慶應義塾大学理工学部管理工学科 *Technical Report*, No.95008．
[5] 千住鎮雄・伏見多美雄(1994)：新版・経済性工学の基礎，日本能率協会マネジメントセンター．