1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

各節点の需要が異なる最小流入点集合配置問題

01009550　豊橋技術科学大学情報工学系　伊藤大雄　ITO Hiro
豊橋技術科学大学情報工学系　横山光雄　YOKOYAMA Mitsuo

1．はじめに

与えられたネットワーク上に、指定の条件下で設備を最適に配置する問題は配置問題(location problem)と呼ばれ、様々な研究がなされている[1]。配置問題のほとんどは、目的関数や制約条件の評価に用いる関数（評価関数）を、節点と設備との距離の最大値や合計値としている。最近、評価関数を節点と設備間の連結度や最大流量で評価する研究がなされる様になってきた[2]-[4]。

本稿では、各枝$e\in E$に容量$c(e)$が与えられたフローネットワーク$(G=(V,E),\ c)$と各節点$v\in V$の需要$d(v)$が与えられたとき、任意の$v\in V$に対しv,T間の最大流が$d(v)$以上となる$T\subseteq V$で要素数$|T|$が最小であるものを求める問題、最小流入点集合配置問題に対し$O(np\, s(n,m))$時間の解法を与えた。但しn,mは各々節点数と枝数、pは$d(v)$のうち異なるものの数、$s(n,m)$は２点間の最大流を求めるのに要する時間である。本問題は田村ら[4]によって$O(n^2 s(n,m))$時間の算法が与えられたが、本稿で示すアルゴリズムはそれとは異なる算法で、計算時間が早く、しかも解の自由度が大きい。

2　諸定義

$G=(V,E)$を無向グラフ、Vを節点集合、Eを枝集合とし、節点数をn、枝数をmとする。VとEはグラフGを明示したい場合には$V(G)$と$E(G)$の様に表わすこともある。枝はその両端点$x,y\in V$を用いて(x,y)の様に表わすことができる。正実数集合をR^+_0、非負実数集合をR^+と表わす。グラフと枝の容量関数$c: E\rightarrow R^+$の組合せ$N=(G,c)$をフローネットワークと呼ぶ。フローネットワークにおける２点$x,y\in V$間の最大流量を$f_{max}(x,y)$と表わす。$N=(G,c)$と節点部分集合$T\subseteq V$に対し、Tを節点$t\notin V$に縮約して得られるグラフをG/Tとする。G/Tにおける枝$e=(x,y)\in E(G/T)$の容量$c'(e)$を、$y\neq t$のときに$c'(e)=c(e)$、$y=t$のときに$\Sigma_{z\in T}\, c((x,z))$とする。フローネットワーク$(G/T,\ c')$における$x\in V$と$t$との間の最大流の流量を$f_{max}(x,T)$と書く。$x\in T$の場合は$f_{max}(x,T)=\infty$とする。

最小流入点集合配置問題(Minimum size flow-sink-set location problem; **FSSL**)

入力：$G=(V,E),\ c:E\rightarrow R^+,\ d:V\rightarrow R^+_0$
目的関数：$|T|\rightarrow$最小
制約：任意の$x\in V$に対し、$f_{max}(x,T)\geq d(x)$

Gが非連結な場合、連結成分毎に問題を解くことができるので、入力グラフGは連結と仮定できる。任意の$x\in V$に対し$d(x)=0$の場合は明らかに$T=\phi$が解なので、$d(x)>0$である$x\in V$が存在すると仮定する。図１にFSSLの問題例を示す。

節点部分集合$F\subseteq V$が$\min_{x,y\in F}\{f_{max}(x,y)\}>\max_{x\in F,\ z\in V-F}\{f_{max}(x,z)\}$を満たすとき$F$を流成分(flow-component)と呼ぶ。任意の節点やV自身も流成分である。流成分Fに対し境界流量$fl(F)$を

$fl(F)=\max_{x\in F,\ z\in V-F}\{f_{max}(x,z)\}$　($F\neq V$のとき)
$fl(F)=0$　($F=V$のとき)

のように定義する。流成分はk-枝連結成分の拡張概念である。

２つの異なる流成分F,F'は$F\cap F'\neq\phi$ならば$F\subset F'$または$F'\subset F$であるという性質がある。このことから与えられたネットワークの流成分はそれらの包含関係を表わす一つの木によって表わすことができる。これを流成分の構造木と呼ぶことにする。図１のネットワークの流成分の構造木を図２に示す。

3 解法

FSSLの問題例(G=(V,E), c, d)に対し、

$d_1=\min\{d(x) \mid x\in V, d(x)>0\}$,

$d_k=\min\{d(x) \mid x\in V, d(x)>d_{k-1}\}$ for k=2,3, ..., $p=\max\{k \mid \{d(x) \mid x\in V, d(x)>d_{k-1}\}\neq\phi\}$,

と定める。$x\in V$に対し$d'(x)=\min\{d(x), d_k\}$とし、問題例(G=(V,E), c, d')に対する最適解をd_k-最適解と呼ぶことにする。明らかにd_n-最適解は最適解である。以下にd_k-最適解を求めるアルゴリズムAUGMENT(k)を掲げる。

procedure AUGMENT(k)
begin
1.1 流成分および構造木を見つける。
1.2 全ての流成分Fについてt(F):=0とする。
1.3 d(x), $x\in V$を整列し$d_1, d_2, ..., d_p$を得る。
1.4 k:=min{k, p}
1.5 **call** CHECK(k)
1.6 **do for** $1\le t(F)\le k$である極小流成分F
1.7 　Fの節点$x\in F$を一つ選び、$T:=T\cup\{x\}$。
　od;
end.

procedure CHECK(h)
2.1 **call** CHECK(h-1)
2.2 **do for** $fl(F)<d_h$かつt(F)=0である流成分F
2.3 　Fを一点sに縮約し、$V'=\{x\in V \mid x\in \exists F', F\not\subset F', t(F')\ge 1\}$と$S(d_h)-F$を一点tに縮約したネットワークで、s,t間の最大流量fを求める。
2.4 　**if** $f<\min\{d_h, \max_{x\in F} d(x)\}$ **then**
2.5 　　t(F):=h
　　fi;
　od;
end.

定理1[5] AUGMENT(n)はFSSLをO(np s(n,m))時間で解く。但しpはd(v)のうち異なるものの数、s(n,m)は2点間の最大流を求めるのに要する時間である。□

本定理の証明については紙面の関係上ここでは省略する。詳しくは文献[5]を参照されたい。本算法による図1の問題例の解は{a,b,g}, {q,r}, {u}の3つの流成分からそれぞれ一つずつ、合計3つの節点を選んだもの（例えば{a,q,u}, {b,r,u}等）である。本算法の解はこのように、集合から自由に選択できる形で出力されるので、さらに距離など他の要素を考慮して最善の配置を選択するといった自由度がある。

参考文献 [1] M. Labbe, D. Peeters, and J.-F. Thisse, "Location on Networks," M. O. Ball et al., Eds., Handbooks in OR & MS, Vol. 8 (1995), pp.551-624. [2] Tamura H., Sengoku M., Shinoda S., and Abe T., "Location problems on undirected flow networks," Trans. IEICE. Jap., Vol. E73, No. 12 (1990), pp. 1989-1993. [3] 伊藤, "全節点・領域間がk-枝連結となる様に領域を決定する問題," 信学技報, COMP 96-9 (1996) pp. 1-8. [4] 田村他, "フローネットワークにおける拡張された被覆問題について," 信学技報, CAS96-62 (1996), pp. 39-46. [5] 伊藤, "各節点の需要が異なる最小流入点集合配置問題," 信学技報, COMP 97-14 (1997) pp. 41-48.

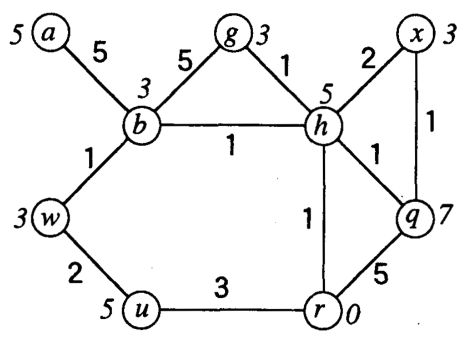

図1 FSSLの問題例

節点の脇の数字が需要d、枝の脇の数字が容量cを表わす。

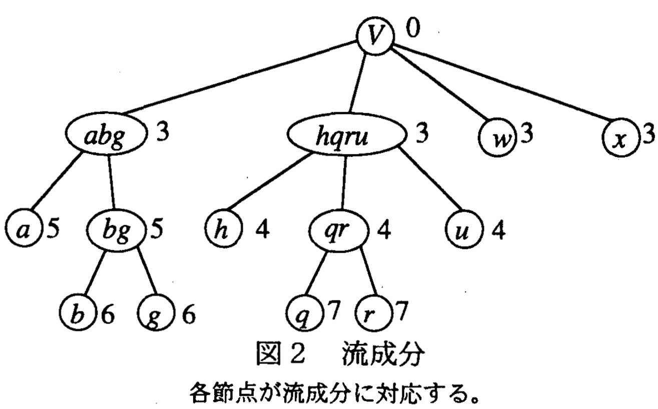

図2 流成分

各節点が流成分に対応する。

節点の脇の数字はその流成分の境界流量flを表わす。