

安定結婚の全列挙アルゴリズム*

01700900 防衛大学校 山田武夫† YAMADA Takeo
 01107880 防衛大学校 片岡靖詞 KATAOKA Sciji

1 はじめに

n 人ずつの男女が集団結婚するものとし、各人は異性に第1位～第 n 位の順位をつけている(図1)。このようなときに、なんらかの意味で“好ましい”組合わせを求める問題に対する一つの解答として、安定結婚問題が研究されて来た[1]。安定結婚は必ず存在し、その一つを $O(n^2)$ の手間で求めるアルゴリズムが知られているが、本稿ではすべての安定結婚を列挙する方法を提案する。

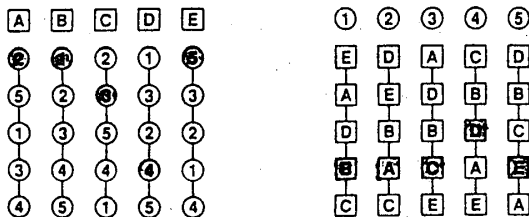
2 準備

男女間の1対1対応を結婚という。図1にはその一例を黒塗りで示した。結婚 σ による男性 m の相手を σ_m と記し、女性 f の相手を σ_f と書く。また、 \succ_m, \succ_f で、それぞれ男性 m 、女性 f の選好関係を表す。結婚 σ が不安定であるとは、ある男女の組 (m, f) について

$$f \succ_m \sigma_m, \quad m \succ_f \sigma_f$$

が成立することをいい、不安定でない結婚を安定結婚という。安定結婚 σ がM-最適(M-最悪)であるとは、任意の安定結婚 $\hat{\sigma}$ に対して

$$\sigma_m \succeq_m \hat{\sigma}_m, \quad (\sigma_m \preceq_m \hat{\sigma}_m) \quad \forall m$$



(a) 男性側の選好 (b) 女性側の選好

図1. 安定結婚問題 ([1]より)

が成立することをいう。F-最適(F-最悪)も同様に定義される。以下は既知である[1]。

1. 安定結婚は常に存在する。
2. M-最適(F-最適)な安定結婚を $O(n^2)$ の手間で求めることが出来る。
3. M-最適な安定結婚はF-最悪であり、逆も真。

M-最適な安定結婚は、図2に示す“propose-reject アルゴリズム”(PR法)により求めることが出来る。すなわち、最初の男性から順に最も好きな女性に求婚し、競合が生じた場合には複数の男性から求婚された女性が最も好む男性を選んで他を断り、断られた男性は次に好きな女性に求婚する。このプロセスにより、図2に示す“求婚フロンティア”が逐次下がって行くが、必ず $O(n^2)$ ステップ以内に停止して(M-最適な)安定結婚が得られる。

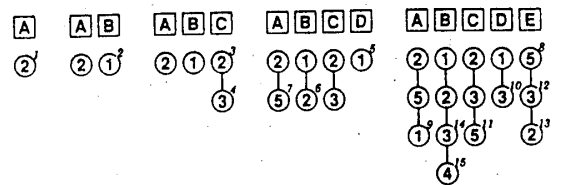


図2. PR法 ([1]より)

3 全列挙法の概要

(図1のようなデータに対して)“安定結婚をすべて求めよ”という問題を P_0 とする。PR法により、図3(a)に示すような安定結婚 σ が一つ得られるが、我々はこれを利用して P_0 を図3(b), (c), (d)等に示すような子問題の組 $P_1 \sim P_n$ に分割する。ここで、子問題 P_i :

男性 $1, \dots, i-1$ までの相手は $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ のまま固定し、男性 i と σ_i の組合せを禁止するという条件のもとで、安定結婚を全列挙せよ。

*日本学会館, 1998.10.15-16
 †E-mail: yamada@cs.nda.ac.jp

である。このように、いくつかの固定成分 F と禁止成分 R を有する問題を $P(F, R)$ と記す。図3では、これらをそれぞれ \square, \times で表示している。このような制約を満たす結婚を、 (F, R) -許容な結婚といい、特にそれが安定結婚であれば (F, R) -許容な安定結婚という。

ここで、 (F, R) -許容な安定結婚が存在すればその一つを見つけ、存在しない場合はそれを確認するアルゴリズム $Find_a_SM(F, R)$ があるとし、 (F, R) を入力したときの出力が安定結婚 σ であったとする。 σ のうち、男性 f_1, \dots, f_p の相手が $Find_a_SM(F, R)$ により定められ、他の男性の相手は F で固定済みであったとしよう。このような場合、 $P(F, R)$ を解くアルゴリズム $Find_all_SMs(F, R)$ を次のように再帰的に構成することが出来る。

アルゴリズム $Find_all_SMs(F, R)$

step 1: $\sigma := Find_a_SM(F, R)$ とし、 $\sigma = \emptyset$ なら return. そうでなければ σ を出力して次へ。

step 2: $l = 1, \dots, p$ に対して $Find_all_SMs(\hat{F}_l, \hat{R}_l)$ を再帰呼び出しする。ただし、

$$\hat{F}_l := F \cup \{(f_1, \sigma_{f_1}), \dots, (f_{l-1}, \sigma_{f_{l-1}})\},$$

$$\hat{R}_l := R \cup \{(f_l, \sigma_{f_l})\}.$$

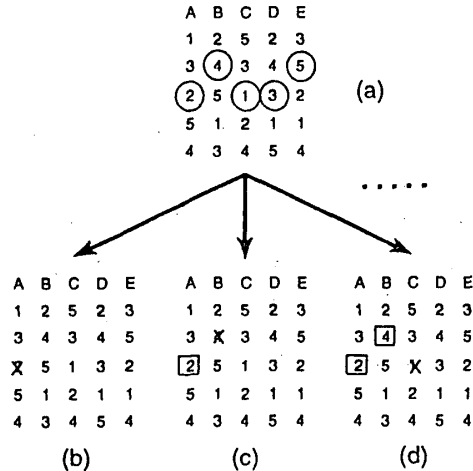


図3. 子問題の生成

4 制約条件のある安定結婚検出問題

前節までで、安定結婚の全列挙のためには、問題 $P(F, R)$ を解くアルゴリズム $Find_a_SM(F, R)$ を構成すれば良いことがわかった。そのために、ここでは次に示す修正 PR 法を提示する。

修正 PR 法は、固定成分を最初からペアとして出発する点と、禁止成分にぶつかった時は、それをスキップして次の候補に求婚しに行く点以外、通常の PR 法と

かわらない。しかし、これによって得られる結婚 σ は (禁止成分をスキップしているため) 必ずしも安定とはならない。そこで、この場合は不安定なペア $m \leftrightarrow \sigma_m$ を見出し、この組合せを解消して男性 m は次の候補に求婚する。

以上が修正 PR 法であるが、この方法の実行中に、次の3つが生じ得る。

1. 安定結婚が得られる。
2. 固定成分が “reject” されてしまう。
3. $n \times n$ の枠を越えてしまう。

今、図4に \square と \times で示すような (F, R) に対し、 (F, R) -許容な安定結婚 σ が存在するとし、これを \bigcirc で示す。これに対して修正 PR 法実行中の求婚フロントティアが前進して行く様子を Δ で図4(a)~(c)に示した。このとき、例えば図4(b)のように A, C がともに女性 α に求婚し、前者が reject されたとすると、 $A \leftrightarrow \alpha$ は不安定ペアとなるので、2 は生じない。また、図4(c)のように、フロントティアが σ を突き抜けて進行するとすると、 $E \leftrightarrow \beta$ が不安定ペアとなるので、3 も生じない。したがって、修正 PR 法により、 (F, R) -許容な安定結婚が得られるか、又は、(2, 3 が生起して) そのような解が存在しないことが証明される。

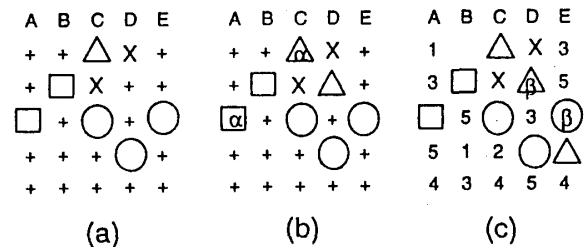


図4. 修正 PR 法

5 結び

安定結婚を全列挙するアルゴリズムを示した。全部で C 個の安定結婚があるとすると、それぞれから高々 n 個の子問題が生成され、各子問題に修正 PR 法を適用するのに $O(n^2)$ の手間がかかるので、全体の計算量は、 $O(Cn^3)$ となる。

参考文献

- [1] R. Sedgewick, Algorithms, 2nd ed., Addison-Wesley, 1988.