

確率変数係数を含む多目的線形計画問題に対する 単純リコースモデルに基づく対話型意思決定

01202665 広島大学 坂和正敏 SAKAWA Masatoshi
01109775 広島大学 *加藤浩介 KATO Kosuke
01403974 広島大学 西崎一郎 NISHIZAKI Ichiro
広島大学 植田公一 WASADA Kouichi

1. はじめに

現実社会における意思決定状況を数理計画問題として定式化する場合には、問題に含まれる係数をすべて正確に知ることができるとは限らないため、不確実性やあいまい性を考慮したアプローチが必要となる。このような不確定な要素を含む意思決定問題に対する確率論的な最適化手法として、確率計画法がさまざまな形で発展してきている [1].

本研究では、多目的線形計画問題に含まれる係数が確率変数である場合に焦点をあて、制約式の左辺と右辺の差異をペナルティとする単純リコースモデルに基づく定式化を行った後、意思決定者の満足解を導出するために、基準点法 [5] に基づく対話型意思決定手法の適用について考察し、簡単な例題に対して数値シミュレーションを行う。

2. 確率変数を含む多目的線形計画問題

本論文では、制約式の右辺が確率変数である次のような多目的線形計画問題について考察する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize } z_1(x) = c_1x \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \text{minimize } z_k(x) = c_kx \\ \text{subject to } \quad Ax = b(\omega) \\ \quad \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $b(\omega)$ は m 次元確率変数列ベクトルであり、 x は n 次元決定変数列ベクトル、 c は n 次元係数行ベクトル、 A は $m \times n$ 係数行列である。

問題 (1) は、現実社会においてもしばしば見受けられる。例えば、文献 [1] に述べられているように、 m 種類の製品を n 種類の工程で製造している企業において、各工程の生産レベルを表す決定変数 $x_j, j = 1, \dots, n$ に対して、工程 j の単位生産レベルの利益や生産コスト $c_{ij}, i = 1, \dots, k$ および製品 i の製造量 $a_{ij}, i = 1, \dots, m$ は既知であるが、製品 i に対する需要 $b_i, i = 1, \dots, m$ は不確定であるという状況の下で利潤や生産コストを同時に最適化したいというような場合である。

このような問題 (1) には確率変数係数が含まれるため、通常の数理計画法における解の概念や解法をそのまま適用することはできない。そこで、本論文では、制約式における Ax と b の差異をペナルティ (リコース) とするリコースモデルの中でも単純であるが実用的で

あると考えられる単純リコースモデルに基づく定式化を行う [1].

3. 多目的単純リコース問題

問題 (1) において、 Ax と $b(\omega)$ との差異を確率変数 y^+ と y^- を用いて $y^+ - y^-$ で表せば、 $p + q \geq 0$ を満たす定数ベクトル p, q と y^+, y^- から定められる

$$R(x) = E \left[\min_{y^+, y^-} (py^+ + qy^-) \right] \quad (2)$$

をペナルティ (リコース) とした多目的単純リコース問題は次のように定式化される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize } z_1(x) = c_1x + R(x) \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \text{minimize } z_k(x) = c_kx + R(x) \\ \text{subject to } \quad Ax + y^+ - y^- = b(\omega) \\ \quad \quad \quad x \geq 0, y^+ \geq 0, y^- \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

この問題に対する意思決定者の満足解を導出するためのアプローチとして、ここでは、基準点法に基づく対話型意思決定手法 [3] について考察する。

4. 基準点法に基づく対話型意思決定

問題 (3) の各目的関数 $z_l(x), l = 1, \dots, k$ に対して、意思決定者が自己の志望水準を反映させるための基準目的関数値 $\bar{z}_l, l = 1, \dots, k$ を設定すれば、この基準点にミニマックスの意味で近いパレート最適解は次のミニマックス問題を解くことにより得られる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize } \max_{l=1, \dots, k} \{z_l(x) - \bar{z}_l\} \\ \text{subject to } Ax + y^+ - y^- = b(\omega) \\ \quad \quad \quad y^+, y^- \geq 0, x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

A.P. Wierzbicki の基準点法 [5] では、意思決定者が問題 (4) を解いて得られた最適解に満足ならば終了。そうでなければ、基準点を更新し、満足解が得られるまでこのような対話を繰り返す。

いま、 $b_i(\omega), i = 1, \dots, m$ が互いに独立であるとすると、それらの確率分布 $F_i(\cdot)$ を用いて

$$\begin{aligned} R(x) &= E \left[\min_{y^+, y^-} (py^+ + qy^-) \right] \\ &= \sum_{i=1}^m p_i E[b_i] - \sum_{i=1}^m (p_i + q_i) \int_{-\infty}^{(Ax)_i} b_i dF_i(b_i) \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^m p_i (Ax)_i + \sum_{i=1}^m (p_i + q_i) (Ax)_i F_i((Ax)_i)$$

と表される。ただし、 $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ である。このとき、

$$Z_l(x) = \sum_{j=1}^n \left(c_{lj} - \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \right) x_j + \sum_{i=1}^m (p_i + q_i) \times \left\{ (Ax)_i F_i((Ax)_i) - \int_{-\infty}^{(Ax)_i} b_i dF_i(b_i) \right\}$$

とおけば、問題 (4) は次の問題

$$\text{minimize } \max_{x \geq 0} \{ Z_l(x) - \bar{z}_l \} \quad (5)$$

あるいは

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize } s \\ \text{subject to } Z_l(x) - \bar{z}_l \leq s, \quad l = 1, \dots, k \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

と等価となる。いま、文献 [1] より $Z_l(x)$, $l = 1, \dots, k$ は凸関数であるから、 $Z_l(x) - \bar{z}_l - s$ が凸関数であることがわかる。このことから、問題 (6) は凸計画問題となり、例えば、逐次二次計画法 [2, 4] などにより最適解が得られる。

基準点法に基づく対話型意思決定のアルゴリズムをまとめると次のようになる。

手順 1: あらかじめ求められた各目的関数 $Z_l(x)$ の個別の最小値 Z_l^{\min} に基づいて、意思決定者が主観的に基準目的関数値 \bar{z}_l , $l = 1, \dots, k$ を設定する。

手順 2: 現在の基準目的関数値 \bar{z}_l , $l = 1, \dots, k$ に対する問題 (6) を解く。

手順 3: 手順 2 で得られた解と目的関数値を意思決定者に提示し、意思決定者が満足ならば終了。そうでなければ、基準目的関数値 \bar{z}_l , $l = 1, \dots, k$ を更新して、手順 2 に戻る。

5. 数値例

数値例として、ここでは、次のような制約式の右辺が確率変数であるような多目的線形計画問題を取り上げる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize } z_1(x) = -8x_1 - 14x_2 - 6x_3 + R(x) \\ \text{minimize } z_2(x) = 15x_1 + 12x_2 + 8x_3 + R(x) \\ \text{minimize } z_3(x) = 16x_1 - 7x_2 - 5x_3 + R(x) \\ \text{subject to } 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + y_1^+ - y_1^- = b_1 \\ 10x_1 + 3x_2 + 6x_3 + y_2^+ - y_2^- = b_2 \\ x_1 + 8x_2 + 19x_3 + y_3^+ - y_3^- = b_3 \\ y^+, y^- \geq 0, \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $R(x) = E \left[\min_{y^+, y^-} (py^+ + qy^-) \right]$, $p = (2, 2, 3)$, $q = (2, 1, 6)$, 確率変数 b_i , $i = 1, 2, 3$ は $N(20, 3)$ の正

表 1: 対話の様子

	1 回目	2 回目	3 回目
\bar{z}_1	-20.861771	-20.861771	-18.000000
\bar{z}_2	52.787451	65.500000	65.500000
\bar{z}_3	26.223914	26.223914	26.223914
x_1	1.244968	1.212100	1.145585
x_2	1.441511	2.113477	2.045578
x_3	0.360409	0.079206	0.119669
z_1	-8.772871	-16.284988	-14.463206
z_2	64.876351	70.076783	69.036794
z_3	34.047280	30.103144	29.760708

規分布に従うものとする。

ここでは、まず、各目的関数の個別の最小値を求めると、 $Z_1^{\min} = -20.861771$, $Z_2^{\min} = 52.787451$, $Z_3^{\min} = 26.223914$ となるので、仮想的な意思決定者は初期の基準目的関数値をそれぞれの最小値に設定する。この基準点に対して、問題 (6) を解いて得られた結果を表 1 の第 2 列に示す。意思決定者はこの解に満足できず、目的関数 Z_2 を犠牲にしても目的関数 Z_1 , Z_3 を改善しようと考え、基準目的関数値を $(-20.86177, 65.5, 26.223914)$ に更新する。更新された基準点に対して、問題 (6) を解いて得られた結果を表 1 の第 3 列に示す。ここで、 Z_1 , Z_3 は改善されたが、 Z_2 , Z_3 の値がそれぞれ 70 と 30 を越えているのに満足できず、意思決定者は基準目的関数値を $(18.0, 65.5, 26.223914)$ に更新する。この更新された基準点に対して、問題 (6) を解いて得られた結果を表 1 の第 4 列に示す。この解に意思決定者は満足したため、対話は満足解を得て終了となる。

6. おわりに

本研究では、確率変数を含む多目的線形計画問題に対して、単純リコースモデルに基づいた定式化を行うとともに、意思決定者の満足解を導出するためのアプローチとして基準点法に基づく対話型意思決定手法の適用について考察した。

参考文献

- [1] 石井博昭, “確率論的最適化,” 伊理正夫, 今野浩 (編): 数理計画法の応用 (理論編), 産業図書, pp. 1-40, 1982.
- [2] 茨木俊秀, 福島雅夫, FORTRAN 77 最適化プログラミング, 岩波書店, 1991.
- [3] 坂和正敏, 経営数理システムの基礎, 森北出版, 1991.
- [4] 坂和正敏, 数理計画法の基礎, 森北出版, 1999.
- [5] A.P. Wierzbicki, The use of reference objectives in multiobjective optimization, in: G. Fandel and T. Gal (Eds.) Multiple Criteria Decision Making: Theory and Application, Springer-Verlag, 1995, pp. 468-486.