

確率的フロンティアと包絡分析法による技術変化の評価とその比較

申請中 神戸大学 林 崇文* Takafumi HAYASHI
01604524 神戸大学 森田 浩 Hiroshi MORITA
01501824 神戸大学 藤井 進 Susumu FUJII
01405414 流通科学大学 中山 徳良 Noriyoshi NAKAYAMA

1 はじめに

産業界などで企業の業績をはかるものとして効率性がある。この効率性を測る方法には、数理計画アプローチとして包絡分析法(Data Envelopment Analysis: DEA)[1]、そして計量経済アプローチとして決定論的フロンティア、確率的フロンティア(Stochastic Frontier: SF)[2]がある。DEAは入出力の間に特定の関数を想定しないノンパラメトリックな方法で、企業、公共団体などの効率性分析に広く適用されている。一方、決定論的フロンティア、確率的フロンティアは、入出力の間に特定の関数を想定し、そのパラメータを推定するパラメトリックな方法で、産業界全体を対象とした効率性評価に広く適用されている。

決定論的フロンティア、確率的フロンティアにおいて、それぞれのフロンティアには特定の関数型が仮定され、与えられた投入量に対して技術的に可能な最大の生産量を示すものとして定義される。効率的な生産活動はこのフロンティア上で行われている。もし、生産活動がこのフロンティアから下に離れたところで行われていけば、すなわち、可能な最大の生産量を実現していなければ、そのような状態を技術非効率的な状態という。このような考え方については、最初に決定論的フロンティアをFarrellが1957年に提出し、Aigner, Lovell, and Schmidt, また、Meeusen, van den broeckらが、1977年にこの生産関数が確率的に不確定であると仮定し、それを確率的フロンティアとしてその推定方法を示した。この試みとそれに続く一連の研究により、技術非効率性に関する推定方法は飛躍的な進歩を遂げた。

確率的フロンティアでは、 x を入力、 y を出力、 β をパラメータ、確率変数 u, v をそれぞれ非効率性、ノイズを反映するものとし、 f を関数とすると、そのフロンティアは以下のように表される。

$$y = f(x, \beta) \exp(v - u) \quad (1)$$

効率性は、確率変数 u の条件付き期待値から推定される。ここで、仮定する関数型には、Cobb-Douglas型、translog型といったものがある[2]。

2 DEA と SF による時間変化の評価

DEAにおける評価は主として一時点における事業体、生産者の効率性評価である。時系列的にデータのある場合には、DEAではウィンドー分析がある[3]。これは、隣接する2期間をデータをまとめて効率性の評価をすることにより、効率性の時系列的な変化を観察することができるものである。しかし、このウィンドー分析は、効率性の時系列的変化をみることしかできない。そこで、効率性だけでなく、生産性、技術変化といったものをみるための指標Malmquist指数[2]というものがある。これは2

期間の時系列的データにおける優越関係を表す指標である。Cave, Christensen, and DiewertはこのMalmquist指数を生産性に適用することで、2期間の事業体の生産性の優越関係をみることを考えた[4]。ここで、技術変化とはフロンティアの変化、生産性とは効率性とフロンティアの両方が関わる変化と考えられる。

本研究では、Malmquist指数を用いて生産性変化を調べたときに得られる技術変化率の値を用いる。Malmquist指数は、時刻 t の入出力データと時刻 t の効率的フロンティアとの距離関数を $D_o^t(x^t, y^t)$ とすると、次のように表される。

$$M_o(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^t(x^t, y^t)} \left[\frac{D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{D_o^t(x^t, y^t)}{D_o^t(x^t, y^t)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

このように、Malmquist指数は2つの項に分解される。1つめの項が効率性変化、2つめの項が技術変化を表し、Malmquist指数はこの2つを考慮した生産性変化をみることができる[5]。

一方、SFによる時間変化の評価では、SFはパネルデータを扱って効率性を評価することができる。また、後に詳しく述べるが、入力のひとつとして時間を用いることにより、技術変化の評価もすることができる。

3 技術変化の評価

本研究では、2入力1出力システムの時系列的データの技術変化をDEAとSFの2つの方法で測定し、それぞれの測定値について考察をする。DEAを用いる場合、前に述べたようにMalmquist指数を用いて技術変化率を測定する。時間 t から時間 $t+1$ の事業体 o の技術変化を $TECH_o(t, t+1)$ とすると、時間1から T までの事業体 o の技術変化は、 $TECH_o(t, t+1)$ ($t=1, \dots, T-1$)の $T-1$ 個の積により求められる。こうして得られる事業体 o の技術変化をシステム全体で平均をとり、1期間あたりに直して技術変化率の測定値とする。

次に、確率的フロンティア理論を用いて技術変化を測定するには、(1)の関数 f にCobb-Douglas型生産関数を適用し対数をとった、以下のモデルを用いる。

$$\ln y_o^t = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{1o}^t + \beta_2 \ln x_{2o}^t + \beta_3 t + v_o^t - u_o^t \quad (3)$$

$$(t = 0, 1, \dots, T, o = 1, 2, \dots, N)$$

y_o^t : 時間 t の事業体 o の出力
 x_{ko}^t : 時間 t の事業体 o の入力 k ($k=1, 2$)
 t : 時間
 β_k ; 推定するパラメータ ($k=0, 1, 2, 3$)
 v_o^t : ノイズ $N(0, \sigma_v^2)$
 u_o^t : 非効率性

以上の確率的なフロンティア生産モデルについて詳しく述べる。まず、確率的な生産フロンティアの定義により、フロンティアからの乖離は負の方向にしか許されない。そのために、ノイズによる対称的な誤差は誤差項 v_i に吸収されることを期待するものとする。 u_o^t , v_o^t の分布の形状を示すパラメータは生産関数を推定する時と同時に決定される。 v_o^t の確率分布は u_o^t と独立な正規分布 $N(0, \sigma_v^2)$ が一般的である。 u_o^t の分布には、様々な仮定が存在する。例えばガンマ分布、半正規分布や指数分布などが用いられ、本研究では u_o に切断された正規分布 (truncated normal distribution) をとるモデルを用い、 u_o^t を

$$u_o^t = \exp[-\eta(t - T)]u_o = \eta_o^t u_o \quad (4)$$

とする。ここで、切断された正規分布とは $N(\mu, \sigma_u^2)$ の正規分布を $x = 0$ のところで切った $x \geq 0$ の部分の分布のことである。

ところで、技術変化率についてであるが、入力要素 x_1, x_2 に加えて時間を表す変数 t を 3 番目の入力要素として扱い、3 入力 1 出力のシステムとして生産関数のパラメータを推定する。このようにすることで t の係数 β_3 が技術変化率を表すパラメータとなる。この β_3 を推定することで、評価対象となるシステムの 1 期間あたりの技術変化率の値を求めることができる。推定手順としては、最小二乗法を用い、得られた値を初期値として最尤推定法を用いて推定する。

4 数値例を用いた技術変化率の測定

評価対象となるデータとして、技術変化率が 2% であるパネルデータを 5 期間 20DMU に対して作成した。ノイズの大きさを表す σ_v は 0, 0.01, 0.05, 0.10 と変え、それぞれのデータの技術変化率を DEA と SF で測定する。測定結果としては、2% に近いほど望ましい結果といえる。これをそれぞれのノイズの場合に対して 50 通り実行してその得られる技術変化率の平均、分散、SN 比を Table 1 に示す。ここで、SN 比とは平均と分散から得られる指標でこの値が大きいものほど測定値の信頼性は高い。Table 1 をみると、ノイズが小さいときは平均が 2 に近く、分散が小さいことにより、SN 比が大きくなっている。すなわちノイズが小さい場合には、DEA と SF のどちらを用いたときにもよい結果が得られた。ノイズが大きくなると、SF を用いた場合に、平均が 2 から遠ざかり、分散も大きくなり、測定結果が悪くなっている。DEA の方が SF よりもノイズに対するロバスト性があるといえる。

また、この入力を 5 通りに固定し、それぞれに対してノイズの seed を変えて、10 パターンのデータを作成する。そして、そのデータの技術変化率を DEA と SF で測定し、その平均、分散から SN 比を求める。そして、その 5 通りの入力それぞれに対する SN 比をまとめたものを Table 2 に示す。例えば、ノイズが 0.01 のとき、1 通りめ、すなわち 1 段目の入力の場合には、DEA で測定した場合の SN 比が 13.880、SF で測定した場合の SN 比が 20.512 となる。この Table 2 をみると、ノイズが 0.01 の場合において、1 段目の入力のときには、SF の方が SN 比が大きくよい測定結果が得られているのにたいして、3 段目の入力のときには DEA の方が SN 比が大きくよい測定結果が得られている。そして、同様のことが、ノイズが 0.05, 0.10 の場合にもみられる。よって、入力によって、DEA と SF の測定結果の優劣が多少変化しているといえる。また、ノイズが大きくなるにつれて、DEA

の方が SN 比が大きいう状況が増加していることから、ここでも DEA の方がノイズに対するロバスト性があるといえる。

Table 1: ノイズの大きさごとの技術変化率の評価

σ_v		0	0.01	0.05	0.10
平均	DEA	1.962	1.947	1.864	1.754
	SF	1.946	1.993	1.872	1.829
分散	DEA	0.0041	0.0221	0.4871	1.7902
	SF	0.0068	0.0082	0.3992	2.9345
SN 比	DEA	23.27	16.12	3.05	-2.60
	SF	20.77	20.91	3.90	-4.63

Table 2: SN 比による技術変化率の評価

	$\sigma_v = 0.01$		$\sigma_v = 0.05$		$\sigma_v = 0.10$	
	DEA	SF	DEA	SF	DEA	SF
1	13.88	20.51	1.19	3.31	-4.33	-4.03
2	22.23	25.42	4.90	6.72	-2.38	-2.80
3	16.84	16.01	2.19	4.25	-3.09	-4.99
4	17.23	27.37	4.02	2.49	-1.36	-5.98
5	14.45	26.64	4.04	3.78	-0.98	-4.72

5 まとめと今後の課題

今回はパネルデータの技術変化について考察したが、ノイズが大きくなるほど、SF による評価よりも DEA による評価の方がよくなっていることから、DEA の方がノイズに対するロバスト性があると考えられる。

今後の課題としては、効率性に関する研究も必要であると考えられる。また、確率的 DEA モデルを用いて技術変化を評価することも興味深い課題であるといえる。

参考文献

- [1] A.Charnes, W.W.Cooper, and E.Rhodes. Measuring the Efficiency of Decision Making Units. European Journal of Operational Research, vol.2, pp.429-444, 1978.
- [2] Tim Coelli, D.S.Prasada Rao and George E. Battese. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] 刀根 薫. 経営効率性の測定と改善 -包絡分析法 DEA による. 日科技連, 1993.
- [4] Caves D.W., L.R.Christensen and W.E. Diewert. The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity. Econometrica, vol.50, pp.1393-1414, 1982.
- [5] Fare R., S.Grosskopf, M.Norris and Z.Zhang. Productivity Growth Technical Progress, and Efficiency Changes in Industrialised Countries. American Economic Review, vol.84, pp.66-83, 1994.