2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

AHPの幾何平均法と固有ベクトル法の誤差解析

01300450 筑波大学(名誉教授) † 高橋 磐郎
University of Tsukuba Takahashi Iwaro

01011500 日本大学生産工学部 大澤 慶吉
Nihon University Ohsawa Keikichi

01205220 日本大学生産工学部 篠原 正明
Nihon University Shinohara Masaaki

02602260 日本大学生産工学部 三宅 千香子
Nihon University Miyake Chikako

02602250 日本大学生産工学部 松生 拓倫
Nihon University Matsuike Hironori

1 まえがき

AHPにおいて $n\times n$ 比較行列 A の第 i 行の幾何平均と A の主固有ベクトルの第 i 成分とは,$n\leqq 3$ のとき一致すること, また $n\geqq 4$ でも通常は極めて近似することはよく知られている[1]. この研究は, その近似の条件を明確にし, あわせて両者の誤差の評価値を理論的に与え, さらにそのシミュレーションによる検証を与えるものである.

2 基本式

$n\times n$ 比較行列 $A=[a_{ij}]$ の主固有ベクトル $u^T=[u_1,\cdots,u_n]$ に対して

$$a_{ij}=\frac{u_i}{u_j}e_{ij}\ ,\ \ e_{ij}=1+d_{ij}\quad(i<j)\qquad(1)$$

とおくと

$$a_{ji}=\frac{u_j}{u_i}\frac{1}{e_{ij}}=\frac{u_j}{u_i}\frac{1}{1+d_{ij}}\quad(i<j)\qquad(2)$$

となり, d_{ij} は一般に0を中心とした微小な値をとる. 以後, $n=4$ について書くが, 一般の n についても形式的拡張ですむ. A の第 i 行の幾何平均を $\hat{u}_i$ とおくと,

$$\begin{aligned}\hat{u}_1^4 &= a_{12}a_{13}a_{14}=cu_1^4e_{12}e_{13}e_{14}\\ &= cu_1^4(1+d_{12})(1+d_{13})(1+d_{14})\\ \hat{u}_2^4 &= a_{21}a_{23}a_{24}=cu_2^4e_{12}^{-1}e_{23}e_{24}\\ &= cu_2^4(1+d_{12})^{-1}(1+d_{23})(1+d_{24})\\ \hat{u}_3^4 &= a_{31}a_{32}a_{34}=cu_3^4e_{13}^{-1}e_{23}^{-1}e_{34}\\ &= cu_3^4(1+d_{13})^{-1}(1+d_{23})^{-1}(1+d_{34})\\ \hat{u}_4^4 &= a_{41}a_{42}a_{43}=cu_4^4e_{14}^{-1}e_{24}^{-1}e_{34}^{-1}\\ &= cu_4^4(1+d_{14})^{-1}(1+d_{24})^{-1}(1+d_{34})^{-1}\\ &\qquad (c=(u_1u_2u_3u_4)^{-1})\end{aligned}\qquad(3)$$

ところで, A の最大固有値を λ とすると u が主固有ベクトルであることと (1),(2) より, 次の関係が得られる.

$$\begin{aligned}&d_{12}+d_{13}+d_{14}=\lambda-4\\ &(1+d_{12})^{-1}+d_{23}+d_{24}=\lambda-3\\ &(1+d_{13})^{-1}+(1+d_{23})^{-1}+d_{34}=\lambda-2\\ &(1+d_{14})^{-1}+(1+d_{24})^{-1}+(1+d_{34})^{-1}=\lambda-1\end{aligned}\qquad(4)$$

3 d_{ij} の2次以上の項が省略できる場合

定理 3.1 d_{ij} の2次以上の項が省略できる(1に比べて極めて小さい)場合は, A の主固有ベクトルの第 i 成分 u_i と A の第 i 行の幾何平均 $\hat{u}_i$ とは(一定倍を除いて)一致する. つまり

$$\hat{u}_i=\alpha u_i\quad(i=1\sim n)\qquad(5)$$

証明 d_{ij} の2次以上の項が省略できれば

$$\begin{aligned}&(1+d_{ij})^{-1}=1-d_{ij}\\ &(1+d_{ij})(1+d_{kl})=1+d_{ij}+d_{kl}\end{aligned}\qquad(6)$$

等が成立するから, これを (4) に代入すれば

$$\begin{aligned}d_{12}+d_{13}+d_{14}&=\mu\\ -d_{12}+d_{23}+d_{24}&=\mu\\ -d_{13}-d_{23}+d_{34}&=\mu\\ -d_{14}-d_{24}-d_{34}&=\mu\\ &(\text{ただし},\ \mu=\lambda-n)\end{aligned}\qquad(7)$$

が成立する. また (6) を (3) に代入すれば (7) より

$$\begin{aligned}\hat{u}_1^4&=cu_1^4(1+d_{12}+d_{13}+d_{14})=cu_1^4(1+\mu)\\ \hat{u}_2^4&=cu_2^4(1-d_{12}+d_{23}+d_{24})=cu_2^4(1+\mu)\\ \hat{u}_3^4&=cu_3^4(1-d_{13})-d_{23}+d_{34})=cu_3^4(1+\mu)\\ \hat{u}_4^4&=cu_4^4(1-d_{14})-1d_{24}-d_{34})=cu_4^4(1+\mu)\end{aligned}\qquad(8)$$

によって (5) が成立する.

4 d_{ij} の3次以上の項が省略できる場合

d_{ij} の2次以上の項が省略できない場合は, 一般に主固有ベクトルと幾何平均とは一致しないが, d_{ij} の3次以上の項が省略できる場合は, その誤差がある妥当な条件の下で評価できる. 確定値の誤差評価は難しいが, d_{ij} をある条件を持つ確率変数とみなすことによって統計的な誤差評価が可能となる.

一般に $n \times n$ 比較行列 $A = [a_{ij}]$ が一つ与えられたとき, (1),(2) によって ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 個の d_{ij} が定まるが, これらが次の条件を満たす確率変数であると仮定する.

$$E[d_{ij}] = 0 \ , \ V[d_{ij}] = \sigma^2 \tag{9}$$

$$_n\mathrm{C}_2\text{個の } \mathrm{d_{ij}} \text{は独立な確率変数} \tag{10}$$

以上のうち (9) は妥当と思えるが, (10) は数理的直観からは疑問が残る. しかし以下に述べるシミュレーション結果から我々の理論が検証されている.

定理 4.1 d_{ij} の3次以上の項が省略できるとき, $n \times n$ 比較行列 A の第 i 行の幾何平均 $\hat{u}_i$ と主固有ベクトルの第 i 成分 u_i との比を

$$\hat{u}_i / u_i = 1 + \varepsilon_i \tag{11}$$

とおくと,

$$\varepsilon_i = \sum \{\pm d_{jk} d_{\ell m} / n(1+\mu)\} \quad (\mu = \lambda - n) \tag{12}$$

となり, (9),(10) の仮定が成立すれば次が成立つ.

$$V[\varepsilon_i] = \frac{(n-1)(n-2)/2}{n^2(1+\mu)^2} \sigma^4 \tag{13}$$

■

以上によって $\hat{u}_i/u_i$ の誤差 ε_i はその標準偏差 $\sqrt{V[\varepsilon_i]} = \frac{\sqrt{(n-1)(n-2)/2}}{n(1+\mu)} \sigma^2$ によって評価できる (たとえば $2\sqrt{V[\varepsilon_i]}$ より大きくなることはめったにないなど). この場合, σ^2 の値の推定が問題となるが, これは次のようにすればよい:一つの比較行列 $A = [a_{ij}]$ があたえられれば, (1) 式より ${}_n\mathrm{C}_2$ 個の d_{ij} $(i < j)$ が得られる. そこで,

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i<j} (d_{ij}^2 / {}_n\mathrm{C}_2) \tag{14}$$

によって σ^2 を推定することができる.

[定理 **4.1** の証明の骨子]

定理 3.1 の証明を考えを2次の項までとった場合に拡張すると,

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1^4 &= cu_1^4(1 + \mu + d_{12}d_{13} + d_{12}d_{14} + d_{13}d_{14}) \\
\hat{u}_2^4 &= cu_1^4(1 + \mu - d_{12}d_{23} - d_{12}d_{24} + d_{23}d_{24}) \\
\hat{u}_3^4 &= cu_1^4(1 + \mu + d_{13}d_{23} - d_{13}d_{34} - d_{23}d_{34}) \\
\hat{u}_4^4 &= cu_1^4(1 + \mu + d_{14}d_{24} + d_{14}d_{34} + d_{24}d_{34})
\end{aligned} \tag{15}$$

を得る. (12) 式の ± は (15) に示される2次の項をとる. (9), (10) の仮定の下に ε_i の分散を計算すると, (13) 式を得る. ■

5 シミュレーション結果

$n \times n$ 比較行列 $A = [a_{ij}]$ を次のように構成した.

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \epsilon_{ij} \quad (i < j) \ , \ w_i = \frac{i}{n(n+1)/2} \quad (i = 1 \sim n)$$

とし, ϵ_{ij} は $[\ell, u]$ 上の一様乱数とした. $n = 5, 10$, $[\ell, u] = [0.9, 1.1]$, $[0.5, 1.5]$ の4通りの組み合わせの各々に対して100通りずつのシミュレーションを行った.

1回のシミュレーションに対し,

$$\varepsilon_i = \hat{u}_i / u_i - 1 \quad (i = 1 \sim n) \quad ((12)\text{式})$$

$$\hat{\sigma}^2 \quad ((14)\text{式}) \ , \ \sqrt{V[\varepsilon_i]} \ (i = 1 \sim n) \quad ((13)\text{式})$$

を求め, $|\varepsilon_i|$ が標準偏差 $\sqrt{V[\varepsilon_i]}$ 以上になったのが何個あったかを調べた結果は,

$[\ell, u] \setminus n$	5	10
[0.9,1.1]	8/500	3/1000
[0.5,1.5]	32/500	12/1000

となった. この結果は, 標準偏差 $\sqrt{V[\varepsilon_i]}$ が誤差評価として妥当なものであることを示す.

参考文献

[1] Saaty,T.L and Vargas,L.G "Comparison of eigen value, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios ", Mathematical Modelling, Vol 5, 1984, pp 309-324