

回帰分析を用いた確率的 DEA についての研究

01205520 東京理科大学 末吉 俊幸 SUEYOSHI Toshiyuki
02004130 東京理科大学 *木名瀬 洋一 KINASE Youichi
02103180 東京理科大学 川井 卓 KAWAI Suguru

1. はじめに

DEA(Data Envelopment Analysis)は多入力多出力システムの相対的な効率性を総合的に評価することに広く応用されている。その中に、将来の予測というのを取り入れた DEA モデルである「確率的 DEA」というモデルがある。確率的 DEA モデルは、出力データを将来の予測という面を考慮して事業体の属している分野に詳しい専門家等の人に、楽観値、悲観値、最確値という 3 つの出力値を予想してもらい、出力値の平均と分散(標準偏差)をもとめて測定するものである。しかし、この確率的 DEA で重要となってくる出力値は専門家の意見のみによって生み出されており、客観性に欠ける指標であると考えられる。

そこで本研究の目的として、将来予測という面において専門家の意見という主観的な予測値ではなく、データを統計的に算出することによって客観的な予測値を作り出し、確率的 DEA に確率要素を組み込む手法を提案する。

2. 確率的 DEA

本研究では、将来の効率値を測定するために確率的 DEA を用いる。この確率的 DEA モデルの特徴は、従来の DEA-CCR モデルに確率過程を導入して、将来の情報を組み込むことによってこれを拡張している点である。

2.1 確率的 DEA の定式化

既存研究により確率的 DEA モデルは以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{st. } -\sum_{j=1}^n (\beta_j x_{ij}) \lambda_j + \theta x_{ik} \geq 0, \quad i=1,2,\Lambda,m, \\ & \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{rj} + b_{rj} F^{-1}(1-\alpha_j)) \lambda_j \geq \bar{y}_{rk}, \quad r=1,2,\Lambda,s, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n, \quad \theta: \text{制約なし} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $F^{-1}(\bullet)$ は任意の確率分布の逆関数を意味しており、また確率的 DEA の場合、各事業体の

入力量 x_{ij} 、出力の平均値 \bar{y}_{rj} と分散 b_{rj} 、さらに基準効率値 β_j とリスク α_j が与えられているので、この(1)式は線形計画問題として解くことができる。この(1)式を確率的 DEA モデルの最終形とし、実証研究では全てこのモデルを用いる。なお(1)式からも分かるように確率的 DEA で必要となるデータは、各事業体の「現在における入力データ」と「将来における出力データの平均と分散」である。

3. 将来情報の導入方法

次に、将来の情報を導入するための手段を述べる。導入方法の基本的な流れとしては、過去 5 年分の出力データを回帰直線に適応させ、将来の出力にある幅を持たせて求める。この幅というのは最も楽観的な見積もり(楽観値)から最も悲観的な見積もり(悲観値)の幅となる。その幅から算出される平均、標準偏差を確率的 DEA に導入するものである。本節ではそれを行う上での基本的な考え方を断片的ではあるが説明していく。

3.1 回帰分析

今現在、日本国内において最も幅広く活用されている回帰分析手法は最小二乗法だが、これは微分可能性という特性により大きいサンプルに対応できるからである。ところが、この手法には異常値が発生すると回帰平面の精度が低下するという欠点がある。そこで、本研究では異常値に強いといわれる最小絶対値法も回帰分析を行う手法の一つとして取り上げる。この手法は目標計画法(Goal Programming)でモデル化され、LP(Linear Programming)で解けることから OR(Operations Research)とも深い関係を持つ。

最小二乗法は 1795 年に Gauss によって回帰分析規準が考え出され、測定のデータ分析に用いられる。この回帰規準は

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2 \quad (2)$$

で表現される。

一方、最小絶対値法は独立変数(x)と従属変数(y)で表されたデータに対して $y = \beta_0 + \beta_1 x$ の形をした回帰式に当てはめたと考える。これらの回帰係数

(β_0 と β_1)を推定する回帰規準として Bosocovich は

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n |y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)| \quad (3)$$

を提唱した。この式は誤差の絶対値の合計を最小化している。添字“i”はデータの測定順序を示し、“n”はデータのサンプル数を示している。最小絶対値法を目標計画法でモデル化するのを説明するために、(3)式を一般化した重回帰分析として問題を取り扱う。従って、i番目のデータに関する従属変数とm個の独立変数ベクトルの関係は

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n |y_i - X_i \beta| \quad (4)$$

としてモデル化される。

本研究ではこの2手法から将来の最も起こり得るような出力値を算出する。

3.2 管理限界線

ここでは将来の出力値に幅を持たせるために楽観値と悲観値を求める方法を紹介する。

3 σ 法・・・管理状態における統計量tの標本分布の平均値を μ_t 、標準偏差を σ_t とすると、tの管理限界線を $\mu_t \pm 3\sigma_t$ の位置に引く。すなわち、中心線の上下に、tの標準偏差の3倍の位置に引くのである。この方法によると、tの標本分布が正規分布の場合には、異常原因がないにも関わらずtが限界線外に出る確率はおよそ0.3%となる。従って、プロットされる点が限界線外に出るか出ないかをみることは、異常原因がないという仮説に対して、優位水準がおよそ0.3%の優位性検定を行っていることになる。また、tの標本分布が正規分布でない場合には、一般の分布について成立するチェビシェフ(Tchebychev)の不等式によって、異常原因がないときにtが限界線外に出る確率は1/9以下になることが知られている。

チェビシェフの不等式・・・いくつかのモーメントが分かっている場合、その情報だけをもとにして、ある値以上が出る確率はどのくらいかを大雑把に把握することができる不等式で、以下のようになる。

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{1}{c^2} \quad (5)$$

この不等式は母(集団)平均 μ と標本平均 \bar{X} との差が任意の正の値 c よりも大きくなる確率が $1/c^2$ よりも小であることを示すものである。

確率限界法・・・与えられた確率 α に対して、異常原因がない場合に統計量tが上の方の管理限界線を越す確率も、下のほうの管理限界線を越す確率も、いずれも $\alpha/2$ になるように上下の限界線を定める。この場合には、管理水準が守られているかどうかについて、優位水準が丁度 α の検定が行

われていることになる。

これら3つの手法から、標本分布が正規分布である場合は回帰分析により算出された値から上下3 σ の値を求めることで幅を持たせることが出来る。また標本分布が正規分布でない場合は、チェビシェフの不等式と確率限界法の考えから分布における累積確率の上下1/18ずつの値を排除した時の値を求めることで幅を持たせることが出来る。

3.3 PERT/CPM法

最後に予想された将来情報から平均と標準偏差を求める手法として、PERT/CPM法の中で用いられている3点見積もり法を適用する。この手法は、最も楽観的な見積もりである Optimistic estimate=OP (楽観値)、最も起こり得るような見積もりである Most Probable estimate=ML (最確値)、そして最も悲観的な見積もりである Pessimistic estimate=PE (悲観値)の3つの数値を用いて、その変数の平均や分散(標準偏差)を求めるものである。変研究においては、回帰分析と管理限界によるこの3つの数値を将来に関する情報として各事業体の出力値に適用する。また、 β 分布の下でその平均と標準偏差は

$$\begin{aligned} \text{平均} \quad E &= \frac{OP + 4ML + PE}{6} \\ \text{標準偏差} \quad s(\tilde{y}_{ij}) &= \frac{(OP - PE)}{6} \end{aligned} \quad (6)$$

と定められることがPERT/CPM方の中で確認されている。ただし、 $s(\tilde{y}_{ij})$ は \tilde{y}_{ij} の標準偏差を表している。

以上の計算過程から算出されるデータにより、確率的DEAにおいて従来では専門家によって求められてきた将来の出力値の平均と分散(標準偏差)を求めることができる。

4. おわりに

本研究は、従来の確率的DEAモデルの主観的な将来情報の予測ではなく、統計的に算出された客観的な将来情報の予測を考慮した方法の提唱とその実証研究を行った。現状のみならず将来の不確定要素を加味したモデルであるのが確率的DEAであるが、これにより客観的な将来情報を導入することで、専門家の存在が無くてもこのモデルが扱えるものとして、確率的DEAモデルがより一般的になったと言える。

[参考文献]

- [1]末吉 俊幸, “最小絶対値法による回帰分析,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.40, No.2 June 1997.
- [2] “コンビニ(Management & Merchandising of Convenience Store),” 商業界(1999-10)