2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

「環境に依存する最適な(s,S)政策」の存在性

現在申請中　大阪大学経済学研究科　*松本裕隆　MATSUMOTO Hirotaka
01300234　大阪大学経済学研究科　田畑吉雄　TABATA Yoshio

1 はじめに

在庫システムはしばしば、需要や費用構造に依存するため、それらに影響を与えるランダムな外生的環境状態を考慮しなければならない。

本発表では環境を離散時間のマルコフ連鎖とし、環境の変化に依存して需要分布が変動するような製品の在庫システムをDPモデルとして定式化し、最適管理政策について考える。

2 モデル

N期間から成る1種類の製品の離散時間在庫システムを考え、以下のような記号を用いる。

n：期間の番号, $n=N,N-1,\ldots 1,0$

I_n：第n期の環境状態で$\{I_n;n\geq 0\}$は有限な状態空間E上のマルコフ連鎖

$P(i,j),i,j\in E$：環境状態がiからjになる推移確率

X_n：第n期の期首在庫レベル

D_n：第n期の需要

$K_i\geq 0$：環境状態がiの場合の注文量と独立な固定注文費用

$c_i\geq 0$：環境状態がiの場合の単位当たりの注文費用

$h_i\geq 0$：環境状態がiの場合の各期末に発生する単位当たりの在庫維持費用

p_i：環境状態がiの場合の期末に発生する単位当たりの品切れ損失費用（超過需要はバックログされるとする), $p_i>c_i\geq 0,i\in E$

$Y_n(i,x_n)$：第n期の環境状態がiで、期首在庫レベルをx_nとした場合の発注後の在庫レベル, $Y_n(i,x_n)\geq x_n$

すると、任意の$Y_n(i,x_n)$に対して、在庫レベルX_nは$X_{n-1}=x_n+[y_n(i,x_n)-x_n]^+-D_n,x\geq 0$となるマルコフ連鎖である。

このモデルにおける基本的な仮定は各期間中の需要の分布がその期間の環境状態に依存するということである。よって、意思決定者は期首の在庫レベルと環境状態を観察して、その期間に対する注文量を決定する。但し、製品のリードタイムを0と仮定しておく。

需要過程$D=\{D_n;n\geq 0\}$はマルコフ連鎖$\{I_n\}$に依存し、その条件付き分布関数を$A_i(z_n)=P[D_n\leq z_n|I_n=i]$、密度関数を$a_i(z_n)$とする。但し、$A_i(\cdot),a_i(\cdot)$共に微分可能で、さらに$A_i(0)=0,a_i(\cdot)>0$を仮定する。

$V_i^n(x_n)$：状態iで$X_n=x_n$のとき、以後n期間にわたり最適な決定をした場合の期待割引総費用

とすると、そのDP方程式は、

$$
\begin{aligned}
V_i^0(x_0) &\equiv 0,\\
V_i^n(x_n) &= \min_{y_n\geq x_n}\{K_i\delta(y_n-x_n)+G_i^n(y_n)-c_ix_n\},\\
&\quad n>0,i\in E, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

但し、$\delta(y_n-x_n)=\begin{cases}1 & \text{if } y_n-x_n>0,\\ 0 & \text{if } y_n-x_n=0,\end{cases}$

$$
G_i^n(y_n)=c_iy_n+L_i^n(y_n)+\alpha\textstyle\sum_{j\in E}P(i,j)\int_0^\infty V_j^{n-1}(y_n-z_n)dA_i(z_n),\ n>0,i\in E
$$

αは割引率、$L_i^n(y_n)$は第n期の在庫維持・品切れ費用関数の期待値で

$$
L_i^n(y_n)=h_i\int_0^{y_n}(y_n-z_n)dA_i(z_n)+p_i\int_{y_n}^\infty(z_n-y_n)dA_i(z_n),\ n>0,i\in E
$$

3 1期間分析

この節では、前節で導入したモデルの1期間分析を行う。この分析は、後に行うn期間分析を理解するのに重要な準備を与える。まず、(1)式、(2)式を$n=1$として書き直すと、

$$
\begin{aligned}
V_i^1(x_1) &= \min_{y_1\geq x_1}\{K_i\delta(y_1-x_1)+G_i^1(y_1)-c_ix_1\}, &(2)\\
G_i^1(y_1) &= c_iy_1+L_i^1(y_1). &(3)
\end{aligned}
$$

但し

$$
L_i^1(y_1) = h_i\int_0^{y_1}(y_1-z_1)dA_i(z_1)+p_i\int_{y_1}^\infty(z_1-y_1)dA_i(z_1)
$$

(4)式は(3)式の最小化で主要な役割を果たすので、(4)式の性質から調べていく。

$$
\begin{aligned}
\frac{dG_i^1(y_1)}{dy_1} &= G_i'^1(y_1)=c_i+(h_i+p_i)A_i(y_1)-p_i,\\
\frac{d^2G_i^1(y_1)}{dy_1^2} &= G_i''^1(y_1)=(h_i+p_i)a_i(y_1)\\
G_i''^1(y_1) &= (h_i+p_i)a_i(y_1)>0
\end{aligned}
$$

したがって $G_i^1(y_1)$ は凸関数である。

$$\lim_{y_1\to\infty} G_i'^1(y_1) = c_i + h_i > 0$$
$$\lim_{y_1\to 0} G_i'^1(y_1) = c_i - p_i < 0$$

であるから、

$$G_i'^1(y_1) = c_i + (h_i + p_i)A_i(y_1) - p_i = 0$$

を満たす解が唯一存在する。そこで、その解 S_i^1 は $S_i^1 = A_i^{-1}\left[\frac{p_i - c_i}{h_i + p_i}\right]$ となり、$0 < (p_i - c_i) < (h_i + p_i)$ なので、S_i^1 は非負かつ有限となる。

次に、s_i^1 を $y_1 < S_i^1$ で $K_i + G_i^1(S_i^1) = G_i^1(y_1)$ の解とすると、$G_i^1(\cdot)$ は $y_1 < S_i^1$ で減少なので、s_i^1 は唯一存在する。

すると、1期間の最適政策は

$$Y_1^*(i, x_1) = \begin{cases} S_i^1 & \text{if } x_1 \le s_i^1, \\ x_1 & \text{if } x_1 > s_i^1. \end{cases}$$

したがって最適な政策のもとでの期待費用 $V_i^1(x_1)$ は

$$V_i^1(x_1) = \begin{cases} K_i + G_i^1(S_i^1) - c_i x_1 & \text{if } x_1 \le s_i^1, \\ G_i^1(x_1) - c_i x_1 & \text{if } x_1 > s_i^1, \end{cases}$$

で、さらにその1階微分、2階微分は、

$$V_i'^1(x_1) = \begin{cases} -c_i & \text{if } x_1 \le s_i^1, \\ G_i'^1(x_1) - c_i & \text{if } x_1 > s_i^1, \end{cases}$$
$$V_i''^1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_1 \le s_i^1, \\ G_i''^1(x_1) & \text{if } x_1 > s_i^1, \end{cases}$$

となり、$V_i^1(x_1)$ は x_1 に関して準凸型である。

4 n 期間分析

この節では n 期間問題を考え、帰納法を用いて最適政策が、

$$Y_n^*(i, x_n) = \begin{cases} S_i^n & \text{if } x_n \le s_i^n, \\ x_n & \text{if } x_n > s_i^n, \end{cases}$$

但し、S_i^1, s_i^1 はそれぞれ

$$G_i'^n(y_n) = 0$$
$$K_i + G_i^n(S_i^n) = G_i^n(y_n)$$

の解。また、最適な政策のもとでの期待費用 $V_i^n(x_n)$ が

$$V_i^n(x_n) = \begin{cases} K_i + G_i^n(S_i^n) - c_i x_n & \text{if } x_n \le s_i^n, \\ G_i^n(x_n) - c_i x_n & \text{if } x_n > s_i^n. \end{cases}$$

で、さらにその1階微分、2階微分が、

$$V_i'^n(x_n) = \begin{cases} -c_i & \text{if } x_n \le s_i^n, \\ G_i'^n(x_n) - c_i & \text{if } x_n > s_i^n, \end{cases}$$
$$V_i''^n(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_n \le s_i^n, \\ G_i''^n(x_n) & \text{if } x_n > s_i^n. \end{cases}$$

となり、$V_i^n(x_n)$ は x_n に関して準凸型であることを示す。

5 無限期間分析

$V_i(x)$:状態 i で初期在庫レベル x が与えられて、以後最適政策を用いたときの期待割引総費用とすれば、このDP方程式は、

$$V_i(x) = \min_{y \ge x}\{K_i\delta(y-x) + G_i(y) - c_i x\},$$

但し

$$G_i(y) = c_i y + L_i(y) + \alpha \sum_{j\in E} P(i,j) \int_0^\infty V_j(y-z)dA_i(z),$$
$$L_i(y) = h_i \int_0^y (y-z)dA_i(z) + p_i \int_y^\infty (z-y)dA_i(z)$$

となる。有限期間のDP方程式 $V_i^n(x)$ が極限関数 $V_i(x)$ に収束し、その極限関数が上の式を満たすことを示し、さらに有限期間における発注水準 S_i^n と発注点 s_i^n もまた無限期間における発注水準 S_i と発注点 s_i にそれぞれ収束することを示す。

6 数値例

詳細は発表当日に報告する.

参考文献

[1] E.Cinlar,S.Ozekici, "Reliability of complex devices in random environment," Probability in the Engineering and Informational Science,1(1987)97-115.

[2] I.David,E.Greenshtein,A.Mehrez, "A dynamic-programming approach to continuous-review obsolescent inventory problems," Naval Reserch Logistics,Vol.44(1997),757-774.

[3] R.Feldman, "A continuous review (s,S) inventory system in a random environment," Journal of Applied Probability,15(1978),654-659.