2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

予測手法を用いた確率的ＤＥＡに関する研究

02800020　法政大学　*来田健司　RAITA Kenji
01900070　法政大学　若山邦紘　WAKAYAMA Kunihiro

1. はじめに

DEA分析に使われるデータはすべて事業体の過去の実績を示しており，その分析はあくまで過去の事業評価に過ぎなかった．しかしながら，DEAで不確実性を考える必要がないということはなく，DEAの確定的なモデルが多く開発されてきている今日では，次の段階としてデータ固有の偶発的誤差を取り入れたDEAモデルの開発が必要となっている．データの持つ不確実性を記述する数学的な方法には，確率的な変動を表す確率変数として扱う方法とあいまいなものとして表すファジィ数をして扱う方法がある．今回は統計的な予測理論に基づいた推定値を使うため確率的な枠組みで考える．確率的計画法の一種としてCharnes and Cooperによって提唱されているCCP法がある．これを使いDEAを確率的プロセスへ移行させ，確率的効率について考える．

2. モデルの定式化

CCRモデルと比較しながら，DEA効率値の予測分析を定式化することから始める．Cooper他[1,2]は，CCP法をCCRモデルや加法モデルにとり得れる方法を紹介している．それらの確率的DEAモデルにおいては，入力・出力ともに確率変数である．しかし，現実の問題の多くにおいて，決定変数としての投入量は一般に操作しうるものと考えられる．一方，産出量は外部要因に大きく依存しているため操作するにはかなりの難しさがある．したがって，今回の予測分析を行うためには，入力は決定変数とし，出力は確率変数として考える．次に，DEA予測分析の解析的な構造を示すため，ここではCCRモデルと確率的DEAモデルを比較する．数学的にこの２つのモデルは次のように定式化される．

CCRモデル:

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1 \qquad (\text{j=1,2,}\cdots\text{,m}) \\
& u_r \geq 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, s) \\
& v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)
\end{aligned} \tag{1}
$$

予測モデル:

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \mathrm{E}\left(\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rk}\right) \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \Pr\left(\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq \beta_j\right) \geq 1 - \alpha_j \\
& \qquad (\text{j=1,2,}\cdots\text{,m}) \\
& u_r \geq 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, s) \\
& v_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)
\end{aligned} \tag{2}
$$

ここで，上記の２式はk番目の事業体のDEA効率値を測定するための定式化．変数(V_iとU_r)はそれぞれi番目の入力とr番目の出力に関するウェイト．Prは確立を表し，記号“ˆ”は，$\hat{y}_{rj}$が確率変数であることを示す．また，上記のモデルの違いは，

(a) 式(1)ではk番目の事業体の経営効率は，他の事業体との相対評価によって決められる．一方，式(2)はj番目の事業対の効率値を表すβ_j以下として定式化されている．式(1)において$\beta_j = 1$であるので，DEAの予測モデル(2)はCCRモデル(1)の一般系と考えてよい．

(b) α_j は入出力の比率が β_j 以上になる確率を表し，逆に，$1-\alpha_j$ は効率値が β_j を達成できる確率を表している.

(c) 式(1)の目的関数は $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk}$ によって，式(2)の目的関数は $\mathrm{E}(\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rk})$ によって定式化される．ここで表示記号“E”は加重された $\hat{y}_{rk}(r=1,2,\cdots,s)$ の合計による期待値を表す.

式(2)のままでは直接線形計画法で計算することができないため再定式化すると,

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \mathrm{E}\left(\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rk}\right) \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rj} \geq \sqrt{V_j} F^{-1}(1-\alpha_j) \\
& \qquad\qquad (\mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{m}) \\
& u_r \geq 0 \quad (r=1,2,\cdots,s) \\
& v_i \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ここで，F は標準正規分布の累積分布関数，F^{-1} はその逆関数を示す．まだ次のような問題が残っている.

(a) 目的関数が $\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rk}$ の期待値(E)によって表される.

(b) 制約式では，分散 V_j が2次式によって定式化されている.

式(3)を線形計画問題として解けるようにするため，各出力の確率変数 $(\hat{y}_{rj})$ が $\hat{y}_{rj} = \bar{y}_{rj} + b_{rj}\zeta(r=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,n)$ により表されると仮定する．ここで，$\bar{y}_{rj}$ は $\hat{y}_{rj}$ の期待値であり、b_{rj} はその標準偏差である．確率変数 (ζ) は正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従うと仮定する.

これらの結果として，ＤＥＡ予測分析は次のＤＥＡモデルとして定式化される.

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rk} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i(\beta_j x_{ij}) - \sum_{r=1}^{s} u_r \{\bar{y}_{rj} + b_{rj}\sigma F^{-1}(1-\alpha_j)\} \geq 0 \\
& \qquad\qquad (\mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{m}) \\
& u_r \geq 0 \quad (r=1,2,\cdots,s) \\
& v_i \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

さらに，これの双対系は

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \theta \\
\text{s.t.}\quad & -\sum_{j=1}^{n} (\beta_j x_{ij})\lambda_j + \theta x_{ik} \geq 0 \\
& \qquad\qquad (\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{m}) \\
& \sum_{j=1}^{n} \{\bar{y}_{rj} + b_{jr}\sigma F^{-1}(1-\alpha_j)\}\lambda_j \geq \bar{y}_{rk} \\
& \qquad\qquad (\mathrm{r}=1,2,\cdots,\mathrm{s}) \\
& \lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \\
& \theta : \text{制約なし} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となる．ここで示されたDEA予測モデルと従来のCCRモデルの違いは，次のようにまとめられる.

(a) 効率値 (θ) はその期待レベルによって影響を受ける.

(b) 効率的フロンティアの形状は出力がどの程度平均 $(\bar{y}_{rj})$ から乖離するかによって決められる.

(c) リスク (α_j) 範囲は $\bar{y}_{rj} + b_{rj}F^{-1}(1-\alpha_j) > 0$ により制約される．この制限は $\alpha_j < 1 - F(-\bar{y}_{rj}/b_{rj})$ という条件を意味する.

3. 数値実験

$\hat{y}_{rj}$ に関する $\bar{y}_{rj}$ と b_{rj} を決定するため，上記のモデルによる3点見積もり法[3]，ブートストラップ法を適用した数値例は紙面の関係上，発表会当日に紹介する.

参考文献

[1] Cooper,W.W.,Huang,Z.andLi,S.X.,Satisficing DEA Models under Chance Constraints,*Annals of Operations Research*, Vol.66, pp.279-295,1996

[2] Cooper,W.W.,Huang,Z.,Li,S.X. and Olesen,O.B. Chance Constraint Programming Formulations for Stochastic Characterizations of Efficiency and Dominance in DEA,*Annals of Operations Research*, Vol.66, pp.279-295,1998

[3] 末吉俊幸,DEA －経営効率分析法－, 朝倉書店,2001