

整数計画法を用いた凹型生産コスト付き輸送問題最適化

申請中 中央大学 *江川 隆章 EGAWA Takaaki
01102370 中央大学 今野 浩 KONNO Hiroshi

1 はじめに

標準的な輸送問題は、製品を工場から倉庫へ輸送する際にかかる輸送コストを最小化するものである。

しかし実際には輸送コストだけでなく、工場で製品を造る際にかかる生産コストも考慮に入れなければならない。また、その生産コストは造った製品の個数に比例して増加するとは限らない。生産する製品が多くなれば、それだけ生産コストは割安になるのが一般的である。したがって、生産コスト関数は単調増加な凹関数となる。

これより、凹型生産コスト付き輸送問題は非線形整数計画問題となるが、実用規模の問題を解くのは容易ではない。

Yajima ら [2] は、超直方体分割法に基づく分枝限定法でこの問題を解いているが、余り大きな問題を解くことには成功していない。

そこで本研究では、生産コスト関数を区分線形近似することによって、問題を混合整数線形計画問題に書き直して解くことにする。そして、この方法でどの程度の規模の問題がどの程度の時間で解くことが可能かを検証し、超直方体分割法に基づく分枝限定法と比較する。

2 定式化

(i) 目的関数

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(w_i)$$

ここで、 c_{ij} は工場 i から倉庫 j に製品 1 個を輸送する際にかかる輸送コストである。 x_{ij} は変数であり、工場 i から倉庫 j に輸送された製品の個数である。 $\alpha_i g_i(w_i)$ は工場 i における生産コスト関数であり、これは凹関数である。 α_i は任意の値で生産コスト関数を重み付けしている。また、 w_i は工場 i で造った製品の総個数である。

よって、 $\alpha_i g_i(w_i)$ は工場 i でかかった生産コストを表す。すなわち、目的関数は輸送コストと生産コストの総和である。

(ii) 輸送コスト制約条件式

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

a_i は工場 i での最大生産可能量である。 b_j は倉庫 j での需要量である。

(iii) 生産コスト関数の区分線形近似

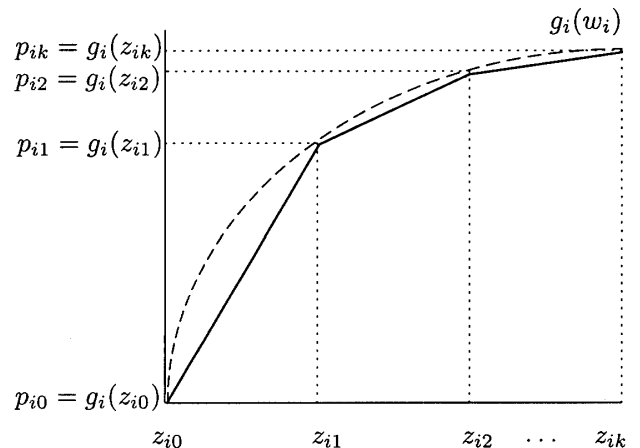


図 1. 生産コスト関数の区分線形近似

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{l=0}^k \lambda_{il} z_{il}, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{l=0}^k \lambda_{il} &= 1, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{l=0}^k y_{il} &= 1, \quad i = 1, \dots, m \\ \lambda_{i0} &\leq y_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \\ \lambda_{il} &\leq y_{il} + y_{il-1}, \quad i = 1, \dots, m; l = 1, \dots, k \\ \lambda_{il} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m; l = 0, \dots, k \\ y_{il} &= 0 \text{ or } 1, \quad i = 1, \dots, m; l = 0, \dots, k \end{aligned}$$

これより、問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned}
 & \text{最小化} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^k \alpha_i p_{il} \lambda_{il} \\
 & \text{条件} && \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 & && \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 & && x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \\
 & && \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{l=0}^k \lambda_{il} z_{il}, \quad i = 1, \dots, m \\
 & && p_{il} = g_i(z_{il}), \quad i = 1, \dots, m; \quad l = 0, \dots, k \\
 & && \sum_{l=0}^k \lambda_{il} = 1, \quad i = 1, \dots, m \\
 & && \sum_{l=0}^k y_{il} = 1, \quad i = 1, \dots, m \\
 & && \lambda_{i0} \leq y_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \\
 & && \lambda_{il} \leq y_{il} + y_{il-1}, \quad i = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, k \\
 & && \lambda_{il} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad l = 0, \dots, k \\
 & && y_{il} = 0 \text{ or } 1, \quad i = 1, \dots, m; \quad l = 0, \dots, k
 \end{aligned}$$

3 計算実験

次にこの問題を CPLEX8.1 を用いて解いた結果について説明する。この際、 c_{ij}, a_i, b_j には EXCEL で発生させた乱数データを使用した。また、[2] にならって $g_i(w_i) = w_i^{0.6}$ という関数に設定した。 α_i については $\alpha_i = \alpha (i = 1, \dots, m)$ として、総輸送コスト：総生産コストがおよそ 1 : 1 になるような α を設定した。生産コストと輸送コストの間に大きな差がある問題は比較的容易に解けるが、両者が同程度である場合には時間がかかるので、ここで解いた問題はいわば最も解きにくい問題群であるといえる。

また区分線形近似における誤差については、

$$\text{総誤差} / \text{総生産コスト} \leq 10^{-5}$$

となるまで繰り返し問題を解いて近似するようにアルゴリズムを書き計算した。

ここでは倉庫数 $n = 50$ のときの工場数 $m = 30, 40, 50$ の 3 パターンの結果を以下に示す。これは 1 パターンにつき c_{ij} の乱数データ 10 セットで検証している。なお計算機環境は CPU が 2.80GHz、メモリが 1Gbyte である。

data \ m	30	40	50
data1	7.03	797.75	76.3
data2	1.17	6.57	23628.01
data3	0.76	15.83	913.93
data4	1.86	94.37	430.78
data5	21.94	12.8	21970.51
data6	1.12	3404.82	8.01
data7	2.37	5.64	327.31
data8	4.13	76.32	372.64
data9	0.73	91.99	194.52
data10	3.52	12.44	1277.76
中央値	2.12	46.08	401.71
平均	4.463	451.85	4919.98
標準偏差	6.45	1065.17	9439.09

表 1: 計算時間 (秒)

4 考察と結果

これらの結果より、凹型生産コスト付き輸送問題は工場数が 30~50 個の場合は、実用的な時間で解くことができることがわかった。しかし、工場数が 50 個の場合に関しては、いくつかのデータセットで膨大な時間がかかってしまった。これより、工場数が 50 個以上の場合にはデータによってはさらに多くの時間がかかってしまう可能性もでてくると予想される。

また、超直方体分割に基づく分枝限定法を用いてこの問題を解いた場合には、工場数が 6 個の場合までしか解けないことが [2] に示されている。

したがって、本研究では整数計画法を用いることによって、より大規模の問題を短い時間で解くことができることが示された。

当日の発表では、詳細な計算実験の結果と、さらに大規模な問題を解いた場合の実験結果についても報告する。

参考文献

- [1] 今野浩：「整数計画法」，産業図書，1981.
- [2] Yajima, Y. and Konno, H., "An Algorithm for a Concave Production Cost Network Flow Problem", Japan J. of Industrial and Applied Mathematics 16 (1999) 243-256.