日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

ANP 感度分析とその適用

申請中　静岡大学大学院　中川智克　Nakagawa Tomokatsu
01206313　静岡大学　関谷和之　Sekitani Kazuyuki*

1. 序論

ANP [3] を適用した意思決定に関する事例研究は SCM[1, 4] をはじめ幾つかの分野で報告されて，いずれの研究報告においても ANP によって得た最終決定に関する感度分析が重要視され，その手法の開発が望まれている [2]．つまり超行列に対する整合性を測定する尺度は無く，そのため超行列の数値の変化が総合評価値にどんな影響を与えるかを分析できれば，最終決定の妥当性検証の一助となる．そこで，本研究では，超行列での数値の摂動による感度分析を考察し，いくつかの数値例でその有効性を示す．

2. 2 部グラフ評価構造に対する ANP 感度分析

評価項目 $B_i (i = 1, \ldots, m)$ と代替案 $A_j (j = 1, \ldots, n)$ とからなる相互評価システムを考える．B_i から A_j への評価値を a_{ji},A_j から B_i への評価値を b_{ij} とする．例えば，評価項目が 2 個と代替案が 3 個からなる相互評価システムでの評価値 a_{ij}, b_{ji} は図 1 で示した 2 部グラフの枝の値に対応する．評価項目から代替案への評価，代替案から評価項目

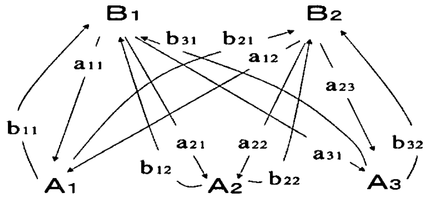

図 1: 評価項目と代替案間の評価構造

への評価をそれぞれ行列形式にまとめ，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

とする．行列 A の第 i 列は評価項目 B_i から代替案への評価値ベクトルであり，行列 B の第 j 列は評価項目 C_j から代替案への評価値ベクトルである．行列 A,B の各列の総和を 1 とする正規化 $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} = 1 \ (i = 1, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} = 1 \ (j = 1, \ldots, n)$ を行ない，

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B \\ A & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

を Saaty [3] は超行列と呼ぶ．超行列 (2.2) に対する方程式

$$S \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

を満たす正の主固有ベクトル $(\boldsymbol{p}^\top, \boldsymbol{q}^\top)^\top$ から，評価項目 B_i の総合評価値は p_i，代替案 A_j の総合評価値は q_j とする．

ANP 感度分析として，まず以下の 2 種類の変動要因に対して総合評価値の影響を調べよう．

1. 代替案 A_j による評価項目への評価ベクトル $(b_{1j}, \ldots, b_{nj})^\top$ は領域 Δ_j を変動する
2. 評価項目 B_i から代替案への評価ベクトル $(a_{1i}, \ldots, a_{mi})^\top$ が領域 Ω_i を変動する．

これらの変動要因を変数ベクトル $\boldsymbol{u}$ とすると，総合評価値は $\boldsymbol{u}$ の関数として与えることができる [5]．

定理 1 $\boldsymbol{a} = (a_{11}, \cdots, a_{1m})$，$\boldsymbol{u} \in \Delta_1$ とする．超行列 $S = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{u}\bar{B} \\ \boldsymbol{a}\bar{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ の主固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} (I - \bar{B}\bar{A})^{-1} \boldsymbol{u} \\ 1 \\ \bar{A}(I - \bar{B}\bar{A})^{-1} \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

のスカラー倍に一致する．ここで，I は単位行列，$\bar{B} = \begin{bmatrix} b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ である．

定理 2 $\boldsymbol{b} = (b_{11}, \cdots, b_{1n})$，$\boldsymbol{u} \in \Omega_1$ とする．超行列 $S = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \begin{matrix} \boldsymbol{b} \\ \bar{B} \end{matrix} \\ \boldsymbol{u}\bar{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ の主固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{B}(I - \bar{A}\bar{B})^{-1} \boldsymbol{u} \\ (I - \bar{A}\bar{B})^{-1} \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$ のスカラー倍に一致する．ただし，I は単位行列，$\bar{B} = \begin{bmatrix} b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ である．

3. 物流システム選択に対する ANP 感度分析の適用

SCM 構成企業間の提携関係を考慮した物流管理基本原理の観点による物流システム選択評価に対して ANP の適用が [1] で報告された．この例に対して上記の定理 1,2 を利用した ANP 感度分析の実践例を示す．この適用例 [1] では，3 種類の物流システム A_1, A_2, A_3 を 8 つの物流管理基本原理 $C_1, \cdots, C_8$ の下にある 30 個の評価項目で評価し 1 種類の物流システム選択をする．ただし，8 つの物流管理基本原理それぞれは SCM を構成する企業間の提携関係と密接に関連するので，適用例 [1] では提携の強さから提携関係を 4 段階 $B_1, \cdots, B_4$ に分類した．図 2 に評価構造を与える．

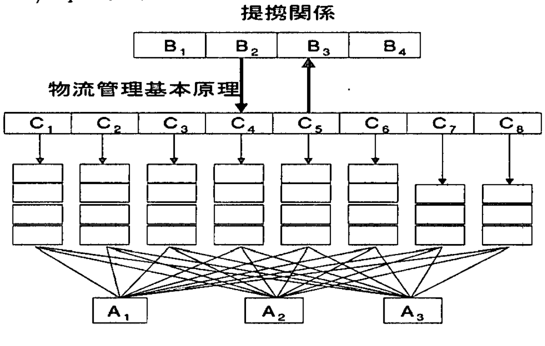

図 2: SCM での物流システムの評価構造

[1] では，図 2 の第 2 層 $C_1,\cdots,C_8$ から第 1 層 $B_1,\cdots,B_4$ への評価行列を B，逆に第 1 層 $B_1,\cdots,B_4$ から第 2 層 $C_1,\cdots,C_8$ への評価行列を A とし，(2.3) から $C_1,\cdots,C_8$ の総合評価値ベクトル $\boldsymbol{q}$ を得る．さらに，H を $C_1,\cdots,C_8$ から 30 個の評価項目への評価行列とし，G を 30 個の評価項目から最下層の $A_1,\cdots,A_3$ への評価行列とすると，$A_1,\cdots,A_3$ の総合評価ベクトル $\boldsymbol{f}$ を $GH\boldsymbol{q}$ で与える．各段階での評価結果より $\boldsymbol{f}=(0.350,0.441,0.384)^\top$ を得て，A_2 を選択した．

ここで，最終結果である「A_2 選択」は評価行列 A,B の変化に対して頑健であるか？を調べる．最終結果に影響を与えやすい評価行列 A,B の部分がわかれば，評価行列 A,B の再検討上で有用である．

評価行列 A,B のある 1 列を $\boldsymbol{u}$ とすると，定理 1,2 から $\boldsymbol{q}$ の各要素は $\boldsymbol{u}$ の線形分数関数となる．ただし，$\boldsymbol{q}$ の要素和が 1 なので各要素の分母は同一の線形関数 $g(\boldsymbol{u})$ である．したがって，A_1,A_2,A_3 の総合評価ベクトル $\boldsymbol{f}$ の各要素も $\boldsymbol{u}$ の線形分数関数である．そこで，$\boldsymbol{f}=(1/g(\boldsymbol{u}))\,(f_1(\boldsymbol{u}),f_2(\boldsymbol{u}),f_3(\boldsymbol{u}))^\top$ とする．評価行列 A の第 4 列を $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_8)^\top$ とすると，$f_1(\boldsymbol{u}),f_2(\boldsymbol{u}),f_3(\boldsymbol{u}),g(\boldsymbol{u})$ の各変数 u_i の係数を表 1 に与える．各変数 u_i の係数は f_2 が f_1,f_3 より大きいので，A の第 4 列がどのように変化しても最終結果である「A_2 選択」に影響を与えない．したがって，B_4 からの評価を再検討する必要はない．

表 1: B_4 からの評価変化による $\boldsymbol{f}$ の各要素への影響

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
f_1	1.95	1.94	1.80	1.65	1.42	1.48	1.23	1.75
f_2	2.19	2.31	2.18	2.68	2.12	1.79	1.86	1.93
f_3	1.76	1.95	2.08	1.72	1.56	1.48	1.55	1.56
g	5.89	6.20	6.06	6.05	5.10	4.76	4.65	5.24

次に，評価行列 B の第 1 列を $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_4)^\top$ とし，$f_1(\boldsymbol{u}),f_2(\boldsymbol{u}),f_3(\boldsymbol{u}),g(\boldsymbol{u})$ の各変数 u_i の係数を表 2 に与える．f_2 の最小係数は 1.85 であり，f_1 の最大係数は 1.39 で，f_2 と f_1 定数項の差は 0.25 なので，任意の $\boldsymbol{u}\in\left\{\boldsymbol{u}\mid\sum_{i=1}^4 u_i=1,u_i\geq 0\right\}$ で $f_2(\boldsymbol{u})>f_1(\boldsymbol{u})$ となる．同様に，f_3 の最大係数は 1.74 であり，f_2 と f_3 定数項の差は 0.1 なので常に $f_2(\boldsymbol{u})>f_3(\boldsymbol{u})$ となる．つまり，A の第 1 列がどのように変化しても最終結果である「A_2 選択」に影響を与えない．したがって，C_1 からの評価を再検討する必要はない．$C_2,\cdots,C_8$ でも同様な結果を得た．

表 2: C_1 からの評価変化による $\boldsymbol{f}$ の各要素への影響

	u_1	u_2	u_3	u_4	定数項
f_1	1.39	1.27	1.20	1.37	0.50
f_2	2.28	2.06	1.85	2.16	0.25
f_3	1.74	1.57	1.45	1.73	0.26
g	5.43	4.92	4.53	5.28	1.00

以上から，図 2 の第 1,2 層間での評価の再検討するならば，B_1,B_2,B_3 のいずれかから第 2 層への評価である．B_1,B_2,B_3 からの評価に対する感度分析に関しては紙面の都合上割愛するが，当日発表する．

4. 内部従属を考慮した ANP 感度分析

第 2 節で議論した相互評価システムに代替案群内の内部従属の評価を追加する．すなわち，超行列

$$S=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & w_B B\\ A & w_C C\end{bmatrix} \tag{4.1}$$

を考える．ここで，$w_B,w_C>0$，$w_B+w_C=1$ であり，$\sum_{i=1}^n c_{ij}=1\ (j=1,\ldots,n)$ である．超行列 (4.1) を持つ ANP は [4] で SCM の戦略分析に適用された．この超行列の主固有値は 1 であることに注意すると 1,2 の変動要因に対する総合評価値の感度分析として以下の結果を得る．

定理 3 定理 *2* と同じ仮定をする，内部従属を含む超行列 $S=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & w_B\boldsymbol{b}\\ & w_B\bar{B}\\ \boldsymbol{u}\ \bar{A} & w_C C\end{bmatrix}$ の主固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\ w_B\bar{B}\left(I-w_B\bar{A}\bar{B}-w_C C\right)^{-1}\boldsymbol{u}\\ \left(I-w_B\bar{A}\bar{B}-w_C C\right)^{-1}\boldsymbol{u}\end{bmatrix}$ のスカラー倍に一致する．

定理 4 定理 *1* と同じ仮定をする．$d_1=c_{11}$，$\boldsymbol{d}=(c_{21},\ldots,c_{n1})^\top$，$\boldsymbol{c}=(c_{12},\cdots,c_{1n})$，$C=\begin{bmatrix}c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix}$ とする．内部従属を含む超行列 $S=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & w_B\boldsymbol{u} & w_B\bar{B}\\ \boldsymbol{a} & w_C d_1 & w_C\boldsymbol{c}\\ \bar{A} & w_C\boldsymbol{d} & w_C\bar{C}\end{bmatrix}$ の主固有ベクトルは $\left(\boldsymbol{p}^\top,1,\boldsymbol{q}^\top\right)^\top$ のスカラー倍に一致する．ただし，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\ &=w_B\boldsymbol{u}+w_B\bar{B}\left(I-w_B\bar{A}\bar{B}-w_C\bar{C}\right)^{-1}\left(w_B\bar{A}\boldsymbol{u}+w_C\boldsymbol{d}\right)\\ \boldsymbol{q}\ &=\left(I-w_B\bar{A}\bar{B}-w_C\bar{C}\right)^{-1}\left(w_B\bar{A}\boldsymbol{u}+w_C\boldsymbol{d}\right).\end{aligned}$$

系 5 $\boldsymbol{u}=(b_{11},\cdots,b_{m1})^\top=\boldsymbol{b}$，$(v_1,\boldsymbol{v}^\top)=(d_1,\boldsymbol{d}^\top)$ とする．$\sum_{i=1}^n v_i=1$，$v_i\geq 0\ (i=1,\ldots,n)$ ならば，定理 *4* の超行列 S の主固有ベクトルは $\left(\boldsymbol{p}^\top,1,\boldsymbol{q}^\top\right)^\top$ のスカラー倍に一致する．ただし，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\ &=w_B\boldsymbol{b}+w_B\bar{B}\left(I-w_B\bar{A}\bar{B}-w_C\bar{C}\right)^{-1}\left(w_B\bar{A}\boldsymbol{b}+w_C\boldsymbol{v}\right)\\ \boldsymbol{q}\ &=\left(I-w_B\bar{A}\bar{B}-w_C\bar{C}\right)^{-1}\left(w_B\bar{A}\boldsymbol{b}+w_C\boldsymbol{v}\right).\end{aligned}$$

5. 結論

内部従属を含む ANP に対して総合評価値の感度分析を提案した．既存の事例研究で報告された最終決定に対して感度分析を行ない，各定理の結果を利用した ANP 感度分析の有効な利用方法を示した．

References

[1] Meade LM and Sarkis J (1998) Strategic analysis of logistics and supply chain management systems using the analytical network process. *Transportation Research E*, **34**, 201-215.

[2] Nakagawa T. and Sekitani K. : "A use of analytic network process for supply chain management", To appear in Asia Pacific Management Review.

[3] Saaty T.L.: *The Analytic Network Process* (RWS Publications,Pittsburgh,1996).

[4] Sarkis J and Talluri S (2002) A model for strategic supply selection. *The Journal of Supply Chain Management: A Global Review of Purchasing and Supply*, **38**, 18-28.

[5] 関谷和之: **AHP,ANP の固有ベクトル法に対する感度分析** (2004 年日本ＯＲ学会春季研究会アブストラクト集) 220-221.