日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

確率ベクトルの感度分析
―ハンドボール・データを例として―

01001600 成蹊大学 ＊上田 徹 UEDA Tohru
02203340 成蹊大学 佐藤 啓 SATO Akira

1．まえがき

ハンドボールの試合のデータをもとにして、マルコフ・モデルによる分析を進めている。定常確率分布が求まる場合には、その確率ベクトルは多変量解析で用いた ε 近傍ベクトル[1]の考え方が使える可能性がある。また、定常確率分布の分散を求める方法[2]も知られている。これら２つの方法をハンドボールの試合データに適用して比較する。

2．確率ベクトルの ε 近傍ベクトル[1]

行列 P^t の最大固有値 λ に対応しノルムが１の固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると、λ は

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^t P^t \mathbf{x}-\lambda(\mathbf{x}^t\mathbf{x}-1)$$

の最大値となる。$\mathbf{x}$ の ε 近傍ベクトルを

$$V(\mathbf{x})-V(\mathbf{x}_\varepsilon)=\varepsilon\lambda$$

を満たす $\mathbf{x}_\varepsilon$ と定義する。

$\mathbf{x}$ からの変位量が最も大きいノルム１の ε 近傍ベクトルは

$$L(\mathbf{y})=(\mathbf{y}-\mathbf{x})^t(\mathbf{y}-\mathbf{x})-\mu(\mathbf{y}^t\mathbf{y}-1)$$
$$+\xi\{(\mathbf{y}-\mathbf{x})^t H(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})+2\varepsilon\lambda\}$$

を最大にするベクトル $\mathbf{y}$ として求めることができる。ただし、

$$H(\mathbf{x})=\partial^2 V(\mathbf{y})/\partial\mathbf{y}^2|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}=2P-2\lambda I$$

である。このとき、最大固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ の ε 近傍ベクトル $\mathbf{y}$ は

$$\mathbf{y}=d_1\mathbf{x}_1+d_2\mathbf{x}_2 \qquad (1)$$

で与えられる。ただし、

$$d_1{}^2=1-\varepsilon\lambda_1/(\lambda_1-\lambda_2);\; d_2{}^2=\varepsilon\lambda_1/(\lambda_1-\lambda_2)$$
$$d_1\geq 0$$

である。正の d_2 に対応する $\mathbf{y}$ を $\mathbf{y}_1$、負の d_2 に対応する $\mathbf{y}$ を $\mathbf{y}_2$ とする。

ところで、確率ベクトルは要素の和が１であるが、任意の非負要素からなるベクトル $\mathbf{y}$ は各要素をその要素和 $T_{\mathbf{y}}$ で割ることにより得られる。すなわち、確率ベクトル化は元のベクトルと同じ方向のベクトルを求めていることになる。式(1)で与えられるベクトル $\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}_1$ からの変位量が最も大きい方向のノルム１の ε 近傍ベクトルになっており、

『$\mathbf{x}_1$ を確率ベクトル化した $\mathbf{x}_1{}^{(P)}$ の ε 近傍ベクトルは、$\mathbf{x}_1$ の ε 近傍ベクトル $\mathbf{y}$ を確率ベクトル化した $\mathbf{y}^{(P)}$ である』 (2)

と定義する。なお、マルコフ遷移行列 P の最大固有値は１であり、それに対応する固有ベクトルの確率ベクトル化により得られるベクトルの各要素がその要素に対応する定常状態の確率となる。

3．定常確率分布の分散[2]

定常確率ベクトルの推定値は、推移確率行列の推定行列 P を用いて

$$P^t\mathbf{a}=\mathbf{a}$$

を満たす固有ベクトル $\mathbf{a}$ として求めることができる。$\mathbf{a}$ の分散共分散行列は

$$V=Z^t\Phi Z$$

で推定できる。ただし、

$$Z=(I-P+A)^{-1}$$

I：単位行列

A：各行が $\mathbf{a}$ である行列

$$\Phi_{jk}=\sum_i a_i{}^2 p_{ij}(\delta_{jk}-p_{ik})/n_i$$

a_i：$\mathbf{a}$ の第 i 要素

Φ_{jk} ：Φ の第 (j,k) 要素

p_{ij}：P の第 (i,j) 要素

状態 i から j への推移確率

$$n_i=\sum_j n_{ij}$$

n_{ij} ：状態 i から j への推移回数

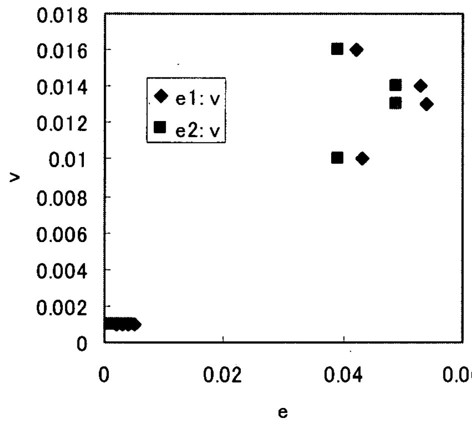
δ_{jk} ：クロネッカーのデルタ

である。また、V の対角要素の平方根からなるベクトルを $\mathbf{v}$ とする。

4．分析例

あるハンドボール試合のデータを節2と節3の方法で分析した結果を最下段に示す。$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ と比べると $\mathbf{v}$ は小さいが、傾向的には似たような結果となっている。分散を求めるのに比べると ε 近傍ベクトルの計算は容易である。

とりあえず、1試合のデータだけで分析してみた。文献[3]では、さらに多くの試合を分析しており、それらのデータを使って分析しようと考えている。



参考文献

[1]T. Ueda(1988)："Sensitivity Analysis in Eigen Value Problems and Its Application to Conditional Ordinal Data", Behaviormetrika, No. 23, pp. 93-109

[2]森村英典、高橋幸雄（1979）：「マルコフ解析」、日科技連、pp. 223-224

[3]佐藤、廣津、上田(2004)：「マルコフモデルを用いたハンドボールの試合のシミュレーション」、OR 学会 2004 年春季研究発表大会

$\mathbf{e}_1=|\mathbf{x}_1{}^{(P)}-\mathbf{y}_1{}^{(P)}|$, $\mathbf{e}_2=|\mathbf{x}_1{}^{(P)}-\mathbf{y}_2{}^{(P)}|$

$\mathbf{x}_1{}^{(P)}$	0.255	0.270	0.013	0.010	0.009	0.018	0.183	0.192	0.014	0.010	0.017	0.008
$\mathbf{y}_1{}^{(P)}$	0.297	0.324	0.017	0.013	0.011	0.022	0.130	0.149	0.011	0.008	0.012	0.006
$\mathbf{y}_2{}^{(P)}$	0.216	0.221	0.010	0.008	0.007	0.014	0.232	0.231	0.018	0.013	0.021	0.009
$\mathbf{e}_1$	0.042	0.054	0.004	0.003	0.002	0.004	0.053	0.043	0.003	0.002	0.005	0.002
$\mathbf{e}_2$	0.039	0.049	0.003	0.002	0.002	0.004	0.049	0.039	0.004	0.003	0.004	0.001
$\mathbf{v}$	0.016	0.013	0.001	0.001	0.001	0.001	0.014	0.010	0.001	0.001	0.001	0.001