1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

代理制約法の多次元非線形ナップザック問題への適用

岡山理科大学大学院 *亀高　哲夫　KAMETAKA Tetsuo
会員番号 01011845 岡山理科大学　岩崎　彰典　IWASAKI Akinori
会員番号 01011425 岡山理科大学　太田垣　博一　OHTAGAKI Hirokazu
会員番号 01402374 関西大学　仲川　勇二　NAKAGAWA Yuji
会員番号 01400565 岡山理科大学　成久　洋之　NARIHISA Hiroyuki

1．まえがき

多次元非線形ナップザック問題の上限値を代理制約法を用いて求める方法を提案する．問題の規模が大きく厳密解を得ることが困難な場合, 上限値を求めることは近似解の品質を評価する上で重要である．筆者らは上限値を求めるための解法の一つとして代理制約法を用いた．代理制約法は代理乗数を用いて, 与えられた多次元非線形ナップザック問題（原問題）を, 代理問題と呼ぶ一次元問題に書き直す．この代理問題の実行可能領域は原問題の実行可能領域を含むため, 代理問題を厳密解に解くことによって, 原問題の一つの上限値を得ることができる．代理双対問題は, この上限値を最少にするような代理乗数の最適化問題として定式化でき, 代理双対問題の解は原問題のかなり良い上限値となることが期待できる．計算機実験により本手法によって良い上限値が得られることを示す．

2．代理制約法の多次元非線形ナップザック問題への適用

多次元非線形ナップザック問題は次のように定式化される．

［K］

$$\text{maximize} \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathcal{N}} f_n(x_n), \tag{1}$$

$$\text{subject to} \qquad g_m(x) = \sum_{n\in\mathcal{N}} g_{mn}(x_n) \le b_m, \tag{2}$$

$$x_n \in \mathcal{A}_n, \tag{3}$$

ここで, $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots, N\}$, $\mathcal{A}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}, \ldots, a_{nK_n}\}$, m は制約式の番号, b_m は制約許容量である．

この問題を分枝限定法（B＆B）や動的計画法（DP）を適用して厳密解を求めることはかなり困難である．

そこで, 問題［K］に代理制約法を適用し, 次のような代理双対問題［SD］を考える．

［SD］

$$\min\{\mathrm{opt}[S(\boldsymbol{u})] : \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}^1\}, \tag{4}$$

ただし, opt$[P']$ は問題 P' の最適な目的関数値, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{M-1})^T \in \boldsymbol{R}^{M-1}$,
$\boldsymbol{U}^1 = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^{M-1} : \sum_{m\in\mathcal{M}} u_m \le 1, \boldsymbol{u} > 0\}$, $\mathcal{M} = \{1, \ldots, m, \ldots, M-1\}$, である．

ここで $S(\boldsymbol{u})$ は代理問題と呼ばれ次式で与えられる．

$$S(\boldsymbol{u}) : \max\{f(x) : \varphi(\boldsymbol{u}, x) \le \beta, x \in \mathcal{A}\}, \tag{5}$$

ただし,

$$\varphi(\boldsymbol{u}, x) = \sum_{m\in\mathcal{M}} u_m\{g_m(x) - g_M(x)\} + g_M(x),$$

$$\beta = \sum_{m\in\mathcal{M}} u_m\{b_m - b_M)\} + b_M,$$

である．

代理問題 $S(u)$ の解は問題［K］の上限値を与え, (4)式に従って u を最適化することにより品質のよい上限値を得ることができる.

3．代理双対問題を解くための解法

代理問題の厳密解法であるモジュラアプローチと, u を最適化するためのＣＯＰアルゴリズムについて述べる.

3．1 モジュラアプローチ

代理問題は単一制約非線形ナップザック問題である. 我々はその厳密解法としてモジュラアプローチ（ＭＡ）を用いた. ＭＡは単一制約で変数分離可能な問題を効率よく解くことができる. ＭＡはＤＰと同様にボトムアップ的な手法であり, 次の（１）（２）の操作を変数の数が１つになるまで繰り返す.

（１）各変数に対して深測操作を行い各変数を構成する要素 a_{nk} の数を減らす.

（２）複数の変数を統合して１つの変数にし, 変数の数を減らす.

変数が１つになった問題から与えられた問題の最適解を求めるのは容易である.

3．2 ＣＯＰアルゴリズム

代理乗数 u を最適化するために, 我々はＣＯＰ（Cutting-off Polyhedron）アルゴリズムを用いた. ＣＯＰは次式の初期多面体 U^1 から出発する.

$$U^1 = \{u \in R^{M-1} : \sum_{m \in \mathcal{M}} u_m \le 1, u > 0\}.$$

第 k 番目の多体面を U^k , その重心を u^k, その u^k に対する代理問題 $S[u^k]$ の解を x^k とする. このとき多体面 U^k を切断して作られる新しい多面体 U^{k+1} は次式で与えられる.

$$U^{k+1} = U^k \cap \{u \in R^{M-1} : \varphi(u, x^k) \le \beta\}. \tag{6}$$

(10)式に基づいて $U^{k+1} = \phi$ になるまで多面体を切断し, 順次縮小することにより, 最適な代理乗数 u^{SD} を求めることができる.

4．計算機実験

本実験に用いた計算機は NEWS-5000VI(CPU R4000SC) である. 制約数 M を２，３，５とし各３００問を解いた結果を表.1に示す. 表には本手法による上限値と列挙法による最適値の差が０，１，２，３，４となったケースの頻度数を示している. それより大きい差が生じたケースはない. また, 表の右端は列挙法による最適値の平均を示す. かなり多くののケースで上限値と最適値が一致することがわかる. また, 上限値と最適値の差を最適値からの相対誤差として評価した場合, その平均は0.5% であり, 最大値は3% である.

表．１　列挙法との比較（問題数３００問）

$f^U - f^E =$	0	1	2	3	4	$\overline{f^E}$
$M = 2$	251	40	7	0	2	88.88
$M = 3$	210	79	11	0	0	86.12
$M = 5$	175	95	26	1	3	86.17

f^U ：上限値

f^E ：列挙法による最適値

$\overline{f^E}$ ：列挙法による最適値の平均

5．むすび

本論文では, 多次元非線形ナップザック問題のように厳密に解くことが難しい問題に対し, 代理制約法を適用することによって品質のよい上限値を容易に求めることができることを示した.