1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ラグランジュ緩和によるポートフォリオ・リバランス問題の解法

早稲田大学 *井深 浩 IBUKA Hiroshi
早稲田大学 葛山 康典 KATSURAYAMA Yasunori
早稲田大学 大野 高裕 OHNO Takahiro

1 序章

1.1 背景と目的

ポートフォリオの，構成資産の売買を伴う定期的な改訂をリバランス (rebalance) という。株式投資におけるリバランスでは，株式の売買に伴い株式売買委託手数料 (以下，委託手数料) が必要となるが，委託手数料は区分線形な凹関数と定められている。凹な費用関数を取り扱うためには整数変数を導入する必要があり，その結果リバランス問題は (混合) 整数計画問題として定式化される。そのため問題の規模が大きくなるにつれ解の導出は困難になる。そこで実務では委託手数料を考慮せずリバランスし，その後に委託手数料を控除するリバランスが行われてきた。しかしこのようなリバランスは近似的であり，機会損失が発生している危険性がある。

委託手数料を考慮したリバランスモデル [1] は，リバランス後のポートフォリオの期待価値を最大化する (混合) 整数計画問題として定式化されるが，本研究ではその問題の構造からモデルをラグランジュ緩和し，独立な2つの子問題に分割する。これにより大規模な問題に対しても，比較的容易に解を導出できる解法を示し，数値実験を行う。

1.2 従来の研究

1.2.1 委託手数料の定式化

区分線形な委託手数料は，実数変数である j 証券 k クラスの証券売買額 $|x_j^k|$ と，それに対応する 0-1 整数変数 δ_j^k を用いれば以下のようにモデル化される。

$$j\text{証券委託手数料} = \sum_{k=1}^{K}\left(v^k|x_j^k| + f^k\delta_j^k\right) \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\delta_j^k = 1 \quad \delta_j^k \in \{0,1\}$$

$$\forall k \quad g^{k-1}\delta_j^{k-1} \le |x_j^k| \le g^k\delta_j^k$$

但し，v^k; 変動手数料率 f^k; 固定手数料 g^k; クラス境界

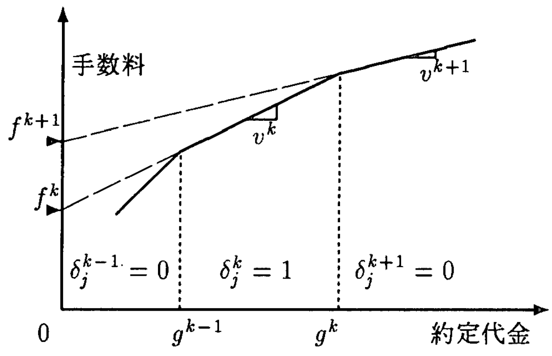

図 1: 株式売買委託手数料

1.2.2 リバランスモデル

委託手数料を考慮したリバランスモデルは絶対値 $|x_j^k|$ を含むことになるが，これは以下の問題と等価となる [1]。ここで目的関数 (2) 式は，リバランス後のポートフォリオ価値の最大化である。また制約 (3) 式は自己充足性制約を表し，(4-a,b,c) 式は MAD リスク [2] 制約を表す。さらに制約 (5-a,b,c,d) 式は区分線形な凹関数である委託手数料を表している。(6) 式は空売り禁止制約である。

Problem Rebalance (PR)

$$\max. \quad \sum_{j=1}^{N} r_j\left\{h_j + \sum_{k=1}^{K}x_j^k\right\} \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \; -\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}x_j^k - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}(v^k x_j^k + f^k\delta_j^k) = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{T} z_t \le \frac{1}{2}TL \tag{4a}$$

$$z_t - \sum_{j=1}^{N} e_j^t\left\{h_j + \sum_{k=1}^{K}x_j^k\right\} \ge 0 \quad t=1,\ldots,T \tag{4b}$$

$$z_t \ge 0 \quad t=1,\ldots,T \tag{4c}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\delta_j^k = 1 \quad \delta_j^k \in \{0,1\} \quad j=1,\ldots,N \tag{5a}$$

$$w_j^k \le g^k\delta_j^k \quad k=1,\ldots,K, \quad j=1,\ldots,N \tag{5b}$$

$$w_j^k - w_j^k \ge 0 \quad k=1,\ldots,K, \quad j=1,\ldots,N \tag{5c}$$

$$w_j^k + w_j^k \ge 0 \quad k=1,\ldots,K, \quad j=1,\ldots,N \tag{5d}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j^k + h_j \ge 0 \quad j=1,\ldots,N \tag{6}$$

但し，N; 証券数 K; クラス数 L; L_1 リスク
h_j; j 証券初期投資額 r_j^t; t 時点の j 証券収益率
r_j; j 証券期待収益率 $(r_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_j^t)$ e_j^t; $(= r_j^t - r_j)$

2 ラグランジュ緩和による解法

問題 PR の解の導出を困難にしている制約は自己充足性制約である。そこで自己充足性制約を以下の (7) 式と (8) 式に分解し，その上で (7) 式と (8) 式をラグランジュ緩和する。これにより大規模なリバランス問題の解の導出をはかる。

$$y_j = \sum_{k=1}^{K}x_j^k + \sum_{k=1}^{K}c_j^k \quad j=1,\ldots,N \tag{7}$$

$$c_j^k = v^k w_j^k + f^k\delta_j^k \;\; (\ge 0) \quad k=1,\ldots,K, \; j=1,\ldots,N \tag{8}$$

ラグランジュ緩和されたPRは2つの独立な子問題，PR_MとPR_Aに分割することができる。以下η_jは(7)式に，μ_j^kは(8)式に対するラグランジュ乗数である。

子問題 PR_M

$$\max. \sum_{j=1}^{N}(r_j+\eta_j)y_j - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}(r_j+\eta_j-\mu_j^k)c_j^k \quad (9)$$

$$\text{s.t.} \; -\sum_{j=1}^{N} y_j = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} z_t \le \frac{1}{2}TL$$

$$z_t - \sum_{j=1}^{N} e_j^t\left\{h_j + y_j - \sum_{k=1}^{K} c_j^k\right\} \ge 0 \quad t=1,\cdots,T$$

$$z_t \ge 0 \quad t=1,\cdots,T$$

$$y_j - \sum_{k=1}^{K} c_j^k + h_j \ge 0 \quad j=1,\cdots,N$$

$$c_j^k \ge 0 \quad k=1,\cdots,K, \quad j=1,\cdots,N$$

子問題PR_Mは線形計画問題であり，解の導出は容易である。

子問題 $PR_A[j]$

分割されたもう一方の子問題は証券ごとに独立な制約をもつため，証券ごとにさらに分割することができる。

$$\max. \; -\sum_{k=1}^{K}\eta_j x_j^k - \sum_{k=1}^{K}\mu_j^k(v^k w_j^k + f^k\delta_j^k) \quad \text{for all } j \quad (10)$$

$$\text{s.t.} \; \sum_{k=1}^{K}\delta_j^k = 1 \quad \delta_j^k \in \{0,1\}$$

$$w_j^k \le g^k\delta_j^k \quad k=1,\cdots,K$$

$$w_j^k - x_j^k \ge 0 \quad k=1,\cdots,K$$

$$w_j^k + x_j^k \ge 0 \quad k=1,\cdots,K$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j^k + h_j \ge 0$$

なお再分割された子問題は，各証券ごとに0-1整数変数δ_j^kのクラスへの最大割当問題となり，容易に解の導出ができる。

2.1 ラグランジュ双対問題

η_j, μ_j^kによる最小化問題として以下に定義するラグランジュ双対問題を解く。なおラグランジュ乗数はSubgradient法により改訂した。

Lagrangean Dual

$$LD = \min_{\eta_j,\mu_j^k}\left\{PR_M(\eta_j,\mu_j^k) + \sum_{j=1}^{N} PR_A[j](\eta_j,\mu_j^k)\right\} \quad (11)$$

2.2 実行可能解の導出

本研究では解法の実行途中にも実行可能解を保持するため，子問題PR_Mに対する解から実行可能なクラスの0-1整数変数δ_j^kを導き，解の候補とするヒューリスティック解法を提案する。

Reassignment Heuristic

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1 & \text{if } \; g^{k-1} \le \sum_{k=1}^{K} x_j^k \le g^k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

3 数値実験

本研究の方法で得られた解を，手数料を無視したリバランスモデルから得られたポートフォリオの期待価値と比較し評価した。提案した解法から得られた実行可能解の精度は，ラグランジュ双対問題による上界値との差により定義される%Gapによって評価した。

手数料を考慮したリバランスモデルは，実行可能解によって，手数料を無視したリバランスを行う場合よりも，高い価値を持つポートフォリオにリバランスすることができた。また解の評価に関しても0.8-0.9%程度の%Gapとなり，有効な解が導出された。

表 1: 数値実験結果 (単位:百万円)

証券数	500	800
ポートフォリオ構築条件		
構築時期◇リスク設定値	'89/1◇15.0	'89/1◇15.0
リバランス実施条件		
実施時期◇リスク設定値	'90/1◇50.0	'90/1◇50.0
実施時のポートフォリオ価値	1,191.3	1,153.3
委託手数料を考慮		
CPU time† (Sec.)	923.0	1,507.7
手数料額◇手元残金額	8.4◇5.4	9.1◇12.7
双対問題の解の値 (L.D)	1,249.1	1,213.7
最良実行可能解の値 (B.F.)	1,238.7	1,203.3
%Gap=(L.D.−B.F.)/B.F.	0.8%	0.9%
委託手数料を無視		
CPU time (Sec.)	1.9	3.1
手数料見積額◇手数料実際額	20.0◇18.0	20.0◇18.7
ポートフォリオ価値	1,229.0	1,193.6

† 手数料考慮下のCPU timeは，データ入力，子問題の設定，Subgradient法とヒューリスティック解法を，100回繰り返すのに要した時間。

4 結論

委託手数料を考慮したリバランスモデルを，ラグランジュ緩和を用いて2つの独立な子問題に分割することにより，大規模な問題に対して有効な実行可能解を導出し，委託手数料の問題から生ずる機会損失の低減をはかることができた。これより，より効果的なポートフォリオのリバランスが可能となった。

参考文献

[1] 井深, 葛山, 大野, "手数料を考慮したポートフォリオのリバランスモデル", 日本経営工学会春季大会予稿集, pp.136-137 (1994).

[2] H.Konno and H.Yamazaki, "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market", *Manage.Sci.*, Vol.37, No.15, pp.519-531 (1991).