

連分数展開を用いた市区町村人口密度の小数近似値

筑波大学社会工学系 大澤義明 OHSAWA Yoshiaki

1. はじめに

都市計画を策定するあるいは地域経済を分析するとき、2数値をわり算して得られる密度、比率、指数などのデータが頻繁に利用されている。例えば、人口密度、建ぺい率、容積率、道路率、交通機関分担率、さらには各種の増減率、構成率など列挙に暇がない。しかも、わり算に利用される数値の多くは自然数である。これらデータは有理数となるが、理解しやすく比較しやすい観点から無理数データと同じく小数近似値で表現される。

小数近似値データのみ提供するとき、この小数近似値の桁数をどれくらいにすべきであろうか。実際、小数近似値の桁数は、信頼できる精度をもつ桁数と分析に必要な桁数のうち桁数の小さい方で決められるのが通常である：大村(1981)参照。しかし、わり算に用いる自然数は誤差を含まないから、信頼できる桁が無限に連なってしまうかもしれない。また、これらデータはあらゆる分析に対応しなければならないので、分析の精度からも桁数を特定できない。したがって、通常ルールに従えば、桁数を特定できないことになる。

ところで、逆に小数近似値から有理数を復元できるであろうか。与えられた実数を有理数で近似する問題はディオファントス近似の一つである：武隅(1972)参照。ディオファントス近似の一方法として連分数展開がある。小数近似値の桁数がある一定以上ならば、連分数展開を利用とした方法により、小数近似値から有理数を復元できる。有理数を復元する小数近似値(γ_0 と呼ぶ)は、有理数の情報を実質上持っている。したがって、この γ_0 を、利用者を特定しないデータの小数近似値として利用できる。ただし、桁数が非常に大きければ事実上小数 γ_0 を利用できない。そこで、本研究では、茨城県及び福岡県のデータを利用して小数 γ_0 のコンマ以下桁数がどの程度になるのかについて考察する。

2. コンマ以下桁数

互いに素である自然数 a 及び b に対し、 $[\frac{a}{b}]_\kappa$ を、コンマ以下 $\kappa + 1$ 桁で四捨五入して得られた $\frac{a}{b}$ の κ 桁小数とする。また、 $[x]$ は x を超えない最大の整

数、 $[x]$ は x 以上の最小の整数を表すとする。このとき、次の性質が成り立つ：大澤(1996)参照。
性質：任意の既約分数 $\frac{a}{b}$ に対し、その小数近似値 $[\frac{a}{b}]_\kappa$ のコンマ以下桁数 κ が b^2 の桁数以上、すなわち、 $\kappa \geq \lceil \log_{10}(b^2 + 1) \rceil$ ($\equiv \kappa_0$) ならば、 $\frac{a}{b}$ は $[\frac{a}{b}]_\kappa$ の近似分数として出現する。また、 $[\frac{a}{b}]_\kappa$ の近似分数 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ において、最初に $[\frac{p_i}{q_i}]_\kappa = [\frac{a}{b}]_\kappa$ となる添字 j 、つまり、 $j = \min\{i \mid [\frac{p_i}{q_i}]_\kappa = [\frac{a}{b}]_\kappa\}$ に対し、 $p_j = a$ 、 $q_j = b$ となる。

表1及び表2は、茨城県及び福岡県の行政コードの若い25市区町村の人口密度について、連分数展開で復元可能な桁数で表現したものである。面積及び昭和60年市区町村人口については総務庁統計局(1987)から引用した。ちなみに、現在の国勢調査データでは、人口密度はコンマ以下3桁で表示されている。ところで、上限値 κ_0 と K との差は、実際どの程度であるのか。この点を把握するために、図1では、茨城県市町村について横軸に面積 S (単位はha)の対数値 $\log_{10}(S+1)$ 、縦軸に四捨五入の場合のコンマ以下桁数 K をとり、数値をプロットした。図2では、横軸を人口密度 $\frac{P60}{AREA}$ の既約分数の分母 b の対数値 $\log_{10}(b+1)$ へ変更し、数値をプロットした。当然のことではあるが、点線で示した κ_0 は上限値を表わすので、両図において、プロットされた点はこの点線上もしくは点線の下方に位置する。これら図から、市区町村面積 S さらに既約分数の分母 b が大きくなるにつれて桁数 K も増加することを読みとることができる。

参考文献

- 1) 大村平(1981)：数のはなし。日科技連。
- 2) 大澤義明(1996)：地域データの小数近似値桁数に関する研究，日本建築学会計画系論文集，484，pp.175-182。
- 3) Schrijver, A.(1986)：Theory of Linear and Integer Programming, Wiley.
- 4) 武隅良一(1972)：ディオファントス近似論。槇書店。
- 5) 総務庁統計局(1987)：昭和60年国勢調査報告。

表1 茨城県の人口密度数値

| 市区町村名 | 人口密度 | 桁数 |
|-------|--------------|----|
| 水戸 | 15.68820 | 5 |
| 日立 | 13.466248448 | 9 |
| 土浦 | 13.12814 | 5 |
| 古河 | 27.3613885 | 7 |
| 石岡 | 7.74901279 | 8 |
| 下館 | 7.43092831 | 8 |
| 結城 | 8.01763533 | 8 |
| 竜ヶ崎 | 6.56062844 | 8 |
| 那珂湊 | 12.7063125 | 7 |
| 下妻 | 5.29644654 | 8 |
| 水海道 | 5.2392615 | 7 |
| 常陸太田 | 3.32649169 | 8 |
| 勝田 | 13.82337907 | 8 |
| 高萩 | 1.752825223 | 9 |
| 北茨城 | 2.737782308 | 9 |
| 笠間 | 2.409841 | 6 |
| 取手 | 21.337676 | 6 |
| 岩井 | 4.611524 | 6 |
| 常澄 | 3.510446 | 6 |
| 茨城 | 2.90946706 | 8 |
| 小川 | 2.8457835 | 7 |
| 美野里 | 3.3844777 | 7 |
| 内原 | 3.5537530 | 7 |
| 常北 | 2.1134862 | 7 |
| 桂 | 1.473432 | 6 |

表2 福岡県の人口密度数値

| 市区町村名 | 人口密度 | 桁数 |
|-------|-------------|----|
| 門司区 | 19.2786676 | 7 |
| 若松区 | 14.6755837 | 7 |
| 戸畑区 | 41.0838745 | 7 |
| 小倉北区 | 53.8468695 | 7 |
| 小倉南区 | 11.21531441 | 8 |
| 八幡東区 | 26.8388238 | 7 |
| 八幡西区 | 29.76083619 | 8 |
| 東区 | 34.607397 | 6 |
| 博多区 | 52.0418798 | 7 |
| 中央区 | 94.81604 | 5 |
| 南区 | 70.26892 | 5 |
| 西区 | 14.53287444 | 8 |
| 城南区 | 74.504015 | 6 |
| 早良区 | 18.36475112 | 8 |
| 大牟田 | 19.79193048 | 8 |
| 久留米 | 17.98168321 | 8 |
| 直方 | 10.46227487 | 8 |
| 飯塚 | 11.3171136 | 7 |
| 田川 | 10.9711609 | 7 |
| 柳川 | 11.8393045 | 7 |
| 山田 | 6.5397701 | 7 |
| 甘木 | 2.61382041 | 8 |
| 八女 | 10.2770408 | 7 |
| 筑後 | 10.2334199 | 7 |
| 大川 | 14.2839654 | 7 |

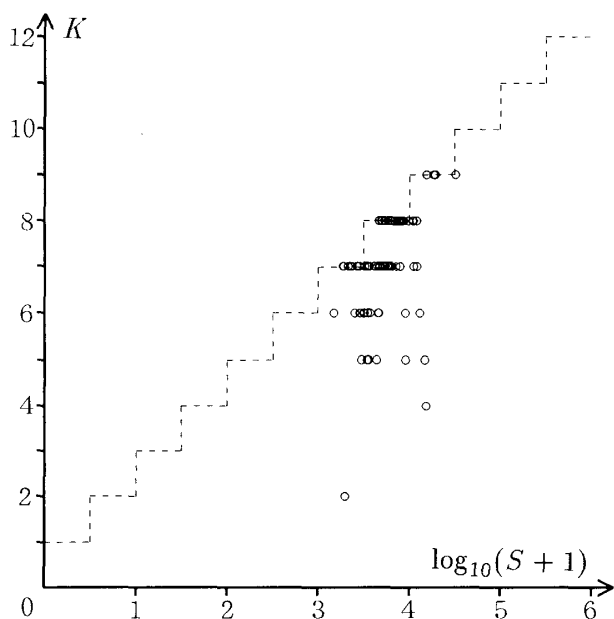


図1 面積対数値と桁数

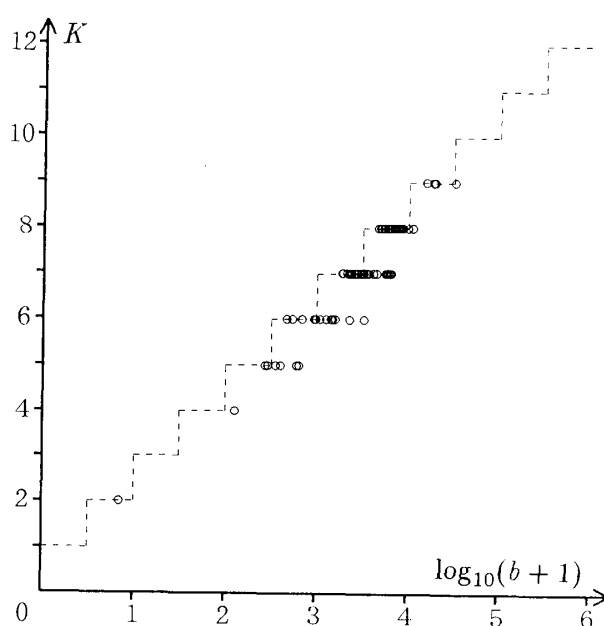


図2 既約分数の分母対数値と桁数