1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

可積分な差分方程式を利用した Gompertz 曲線モデルのパラメータ推定

01206600 NTTマルチメディアネットワーク研究所 *佐藤 大輔 SATOH Daisuke

1 はじめに

Gompertz 曲線モデルは耐久消費財の売り上げ台数の時間的経過を記述・予測することを目的としたモデルの一つである．モデルのパラメータの推定方法には様々なものが提案されており，離散モデルについての最小二乗法 (OLS)，最尤法 (MLE)，非線形推定法などがあげられる [1, 2]．これらの内，OLS は、微分方程式を差分化し、最小二乗法によりパラメータを推定する方法である．OLS は簡単な手法であり，データを入手するごとに推定値を修正するアダプティブ推定にも利用される重要な手法である．しかし共線性による推定値の不安定性などの問題点も指摘されている．共線性の問題以外にも差分化誤差の問題がある．つまり，回帰分析における残差の平方和がたとえ 0 であったとしても，得られたパラメータが元の微分方程式のパラメータとして適当とは限らない．

このため，モデルそのものがデータにあわないのか，パラメータ推定法に問題があるためにモデルにあっていないように見えるのかは曖昧になってしまっている．

本報告では，厳密解を持つ Gompertz 曲線モデルの差分方程式を求め，その差分方程式を利用したパラメータ推定法を提案する．

2 離散モデルについての最小二乗法

Gompertz 曲線モデルのモデル方程式は以下のような方程式である．

$$\frac{dF(t)}{dt} = qF(t)\log\frac{m}{F(t)} \tag{1}$$

ここで，

$F(t)$: 時刻 t までの累積採用者数
m : 飽和需要量
q : 模倣係数

である．OLS では (1) 式を前進差分した差分方程式に書き直す．

$$\frac{1}{\delta}(F_{t+\delta} - F_t) = (q\log m)F_t - qF_t\log F_t \tag{2}$$

ここで，

$$\delta = 1 \tag{3}$$
$$S_t = F_{t+1} - F_t \tag{4}$$

として，(2) 式を書き直し，誤差項 ϵ_t を入れ (5) のような回帰式とみなして最小二乗法でパラメータ推定を行う．

$$S_t = \alpha_1 F_t + \alpha_2 F_t \log F_t + \epsilon_t \tag{5}$$

ここで，

$$\alpha_1 = 2q\log m \tag{6}$$
$$\alpha_2 = 2q \tag{7}$$

である．

3 可積分な差分方程式

新製品普及モデルで最も有名な Bass モデルは Riccati 方程式であり，その可積分差分方程式（ここでは，厳密解を持ち，差分間隔 0 の極限において微分方程式の解と一致する差分方程式）は既に Hirota[3] によって求められている．しかし，Gompertz 曲線モデルに関しては，可積分差分方程式が得られていないため，以下で求める．

微分方程式 (1) 式は以下のような厳密解を持つ．

$$F(t) = \exp[\log m - c\exp(-qt)] \tag{8}$$

厳密解を持つ (1) 式の差分方程式は以下のようになる．

$$\frac{F_{t+\delta}}{F_{t-\delta}} = (\frac{m}{F_t})^{\delta q(1+\frac{1}{1-\delta q})} \tag{9}$$

(9) 式の厳密解は

$$F_t = \exp\{\log m - c(1-\delta q)^{\frac{t}{\delta}}\} \tag{10}$$

である．(9) 式を δ で展開すると

$$F_{t+\delta} - F_{t-\delta} = F_{t-\delta}\Big(\delta(2q\log\frac{m}{F_t}) + \delta^2\cdots\Big) \tag{11}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

となり，(9) 式は $\delta \to 0$ の極限で (1) 式と一致する．また，(10) 式は，$\delta \to 0$ の極限で (8) 式に一致する．さらに，

$$\delta q < 2 \tag{12}$$

の条件下で，

$$t \to \infty \text{ で } u_t \to m \tag{13}$$

となることがわかり，微分方程式の性質を保存していることがわかる．

4 可積分差分方程式のパラメータ推定への利用

(9) 式の両辺の対数をとると

$$\begin{aligned}&\log F_{t+\delta} - \log F_{t-\delta}\\ &= \frac{\delta q(2-\delta q)}{1-\delta q}\Big(\log m - \log F_t\Big)\end{aligned} \tag{14}$$

となる．ここで (14) 式に誤差項 $\hat{\epsilon}$ を入れて (15) 式のような回帰式とみなす．

$$\hat{S}_t = \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 \log F_t + \hat{\epsilon} \tag{15}$$

ここで，

$$\hat{S}_t = \log F_{t+1} - \log F_{t-1} \tag{16}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \delta q(1 + \frac{1}{1-\delta q}) \log m \tag{17}$$

$$\hat{\alpha}_2 = \delta q(1 + \frac{1}{1-\delta q}) \tag{18}$$

$$\delta = 1 \tag{19}$$

である．(5) において $F_t, F_t \log F_t$ の二つの項の値を独立に動かすことはできない．つまり，共線性が生じるという問題がある．それに対し，(15) 式では説明変数が一つであるためにその問題が生じない．

5 従来手法との比較

(8) 式において

$$m = 100,\ q = 0.3,\ c = \log m \tag{20}$$

とし，$t = 0, 2, \cdots, 30$ のときの $F(t)$ の厳密解の値がデータとして得られたものとする．結果を以下に示す．括弧内は使用したデータを示す．

表 1: 推定結果比較 ($t = 0, \cdots, 30$)

	従来手法	提案手法
m	98.794429	100
q	0.59704461	0.23897426

表 2: 推定結果比較 ($t = 0, \cdots, 8$)

	従来手法	提案手法
m	81.4248051	100
q	0.56586051	0.23897426

表 3: 推定結果比較 ($t = 0, \cdots, 4$)

	従来手法	提案手法
m	51.3743854	100
q	1.19712194	0.23897426

6 まとめ

Gompertz 曲線モデルの可積分な差分方程式を求め，これをパラメータ推定に利用する方法を提案した．本提案手法は，従来手法と比較して，少ないデータで正確な推定が可能であることがわかる．本提案手法を用いることにより，モデルの選定に誤りがあるのか，パラメータ推定による誤差なのかの切り分けがより鮮明になるであろう．また，従来手法の欠点といわれている共線性の問題も回避している点でも従来手法よりも優れているといえる．

参考文献

[1] V.Mahajan. E.Muller and F.M.Bass: "New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research", *Journal of Marketing Research*, **54** (1990) pp.1-26.

[2] V.Mahajan and Y.Wind: "Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance", Ballinger Publishing, (1986) pp.203-232.

[3] R.Hirota: "Nonlinear Partial Difference Equations. V. Nonlinear Equations Reducible to Linear Equations", *Journal of the Physical Society of Japan*, **43** (1979) pp.312-319.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．