代理制約法における代理乗数の決定法について

関西大学 *浦田　昌宏　URATA　Masahiro
01402374　関西大学　仲川　勇二　NAKAGAWA　Yuji

1.はじめに

代理制約法はF.Glover[1]によって数理計画法の分野に導入された。これは複数ある制約を緩め、制約式を一つとした緩和問題を考えたものである。主問題が準凸計画であるときは複数個の制約式に乗ずる非負の係数u_iを正しく決定すれば、代理問題が主問題を厳密に解き得ることが示されている。しかし、緩和問題として考えた代理双対問題の最適解は多くの場合、代理双対ギャップ(surrogate duality gap) の範囲に含まれる。すなわち、このギャップは主問題において実行不可能解となる領域のことである。この時は単に主問題の目的関数の限界値を与えるだけである。

ここでは代理乗数の決定法として多面体の重心として代理問題を解き、その多面体を切断して定義域を狭めていく。この操作を多面体が十分小さくなるまで繰り返す。多面体の切断方法として仲川[2]の方法と、Dyer,M.E.[3]の方法を用い、制約式が複数存在するときこれらの方法が有用であるかを比較検討する。

2.問題

ここでは次の数理計画問題を考える。

$$p^0:\ \max\{\ f^0(\mathbf{x}):\ \mathbf{g}^0(\mathbf{x})\le \mathbf{b}^0,\ \ \mathbf{x}\in X\ \}$$

ただし、

$$\mathbf{g}^0(\mathbf{x})=(\ g_1(\mathbf{x}),\ g_2(\mathbf{x}),\ \cdots,\ g_m(\mathbf{x}))^T\in \mathrm{R}^m$$

$$\mathbf{b}^0\ =\ (b_1{}^0, b_2{}^0,\cdots,\ b_m{}^0)^T\quad \mathbf{x}\in \mathrm{R}^n$$

である。

主問題p^0の代理双対問題は次のように定義できる。

$$SD:\ \min\{opt\,[\,S(\mathbf{u})\,]:\mathbf{u}\in \mathrm{U}^1\}$$

ただし、opt [P']は問題P'の最適な目的関数値、

$$\mathbf{u}=\ (u_1, u_2,\cdots,u_{m-1})^T\in \mathrm{R}^{m-1}$$

$$\mathrm{U}^1=\{\,\mathbf{u}\in \mathrm{R}^{m-1}:\sum_{j=1}^{m-1}u_j\le 1,\ \ \mathbf{u}>0\,\}$$

である。

さらに、$S(\mathbf{u})$は次式とする。

$$S(\mathbf{u}):\max\{\,f(\mathbf{x}):\varphi(\mathbf{u},\ \ \mathbf{x}\ )\leqq 0,\ \mathbf{x}\in \mathrm{X}\}$$

ただし、

$$\varphi\,(\mathbf{u},\ \ \mathbf{x}\ )=\sum_{j=1}^{m-1}u_j\{g_j(\mathbf{x})-g_m(\mathbf{x})\}+g_m(\mathbf{x})$$

である。

3.アルゴリズムの概要

3.1　Algorithm I

多面体U^1から出発し、第k番目の多面体U^kにおいてU^kのすべての頂点は単位質量の質点系とみなす。この多面体U^kの質点系の重心$\mathbf{u}^k$を代理乗数として代理問題$S(\mathbf{u}^k)$の解$\mathbf{x}^k$を求め

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

る。この $\mathbf{x}^k$ を用いて切断面 $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{x})>0$ が得られ、次の新しい多面体 $\mathbf{U}^{k+1}$ が作られる。本アルゴリズムでは切断面 $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{x})>0$ を書き換えて $\mathbf{h}^T\mathbf{u}>\beta$ の形で用いる。次に新しい多面体 $\mathbf{U}^{new}=\mathbf{U}\cap\{\mathbf{u}\in\mathbf{R}^{m-1}: \mathbf{h}^T\mathbf{u}>\beta\}$ とその質点系の重心 $\mathbf{v}^*=\mathrm{cent}\,[\mathbf{U}^{new}]$ を求める。

3.2 Algorithm II

多面体 $\mathbf{U}^1$ から出発し、第 k 番目の多面体 $\mathbf{U}^k$ において内接する球の中心を求め、これを代理乗数 $\mathbf{u}^k$ とする。ここで多面体の各平面からの Euclid 距離を $\mathrm{d}(\mathbf{u}^k)$ とし、内接する球の半径の最大値を $\mathbf{r}^*$ と置く。次の式

$$\mathbf{r}^* = \max\ y$$
$$\mathrm{d}(\mathbf{u}^k) \geq y$$
$$\mathbf{e}^T\mathbf{u} = 1, \qquad \mathbf{u} \geq 1$$

を満たす $\mathbf{u}^k$ を $\mathbf{v}^*$ とする。

4.むすび

ここでは代理双対問題を解くアルゴリズムを紹介しただけであるが、今後種々のタイプの問題において計算機実験を本格的に行い、その結果と考察を発表当日に報告する予定である。

参考文献

(1) Glover,F
『A multiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problem』
Operations Research,13,pp.879-919(1965)

(2) 仲川　勇二・疋田　光伯・鎌田　弘
『代理双対問題を解くためのアルゴリズム』
電子通信学会論文誌　'84/1 Vol.J67-A No.1

(3) Dyer,M.E.
『Calcurating surrogate constraints』
Mathematical　Programing,
19,pp255-278(1980)

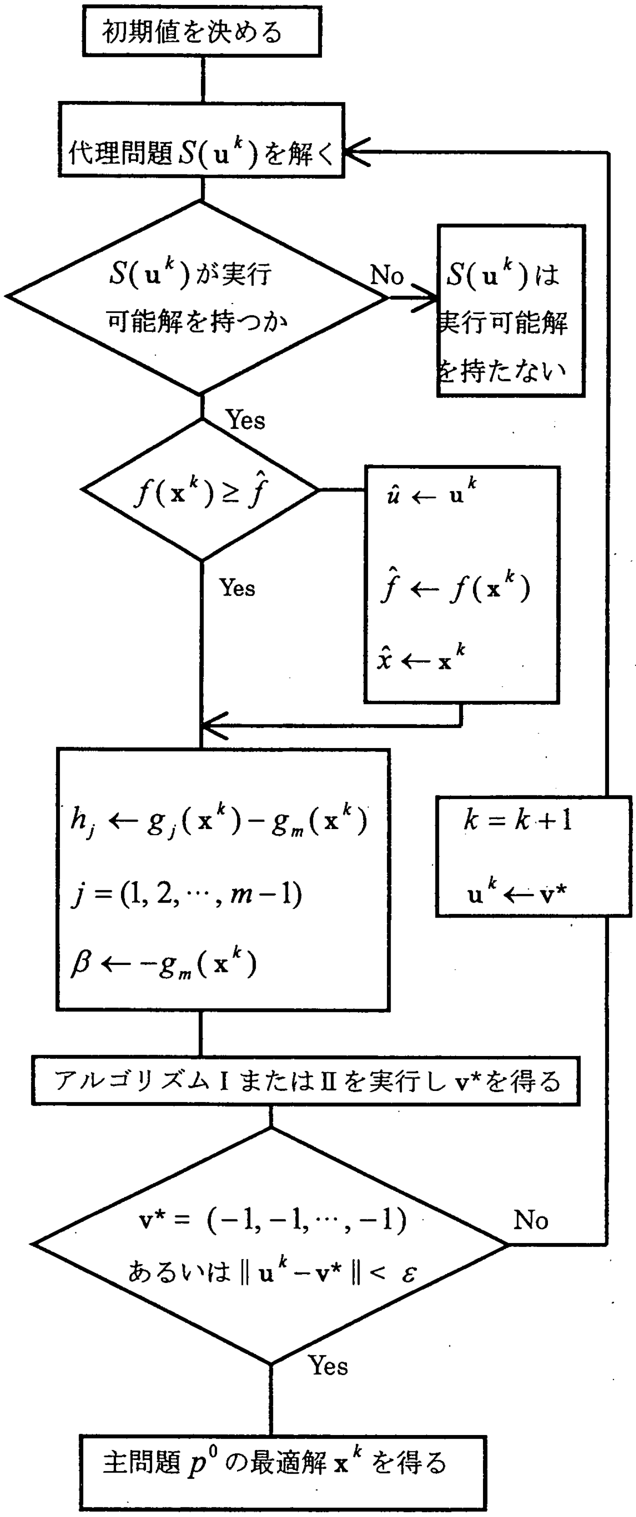

図 1.　代理制約法のフローチャート

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.