

離散最適化のポートフォリオ選択問題への適用

関西大学*西尾友厚 Nishio Tomoatsu

02401834 関西大学 並川哲郎 Namikawa Tetsuroh

01402374 関西大学 仲川勇二 Nakagawa Yuji

1. 代理制約双対問題

次の離散最適化問題を考える。

$$[P^0]: \text{Maximize } f^0(X) = \sum_{i=1}^n f_i^0(x_i)$$

$$\text{Subject to } g_j^0(X) = \sum_{i=1}^n g_{ji}^0(x_i) \leq b_j^0$$

$$x_i \in K_i^0 \text{ for } i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$$

ここで

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), K_i^0 = \{1, 2, \dots, k_i^0\}$$

一般性を失うことなしに

$$f_i^0(x_i) \geq 0 \text{ for } x_i = 1, \dots, k_i^0, i=1, \dots, n$$

$$g_{ji}^0(x_i) \geq 0 \text{ for } x_i = 1, \dots, k_i^0, i=1, \dots, n$$

$$j=1, \dots, m$$

を仮定する。

一般に、複数の制約条件式を持つ規模の大きな離散最適化問題の最適解を求めるアルゴリズムは、指数関数的なオーダーの計算量を必要とし、計算不能となる場合が多い。

そこで制約条件を緩めた緩和問題として代理双対問題を考える。

問題 $[P^0]$ の双対問題は

$$[P^S(u)]: \text{Maximize } f^0(X)$$

$$\text{subject to } ug^0(X) \leq ub^0,$$

$$X \in K^0,$$

ここで

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in R^m,$$

$$g^0(X) = (g_1^0(X), g_2^0(X), \dots, g_m^0(X))'$$

$$b^0 = (b_1^0, b_2^0, \dots, b_m^0)'$$

$$K^0 = \{X : x_i \in K_i^0 \text{ for } i=1, \dots, n\}.$$

代理制約双対問題は次のように定義される。

$$[P^{SD}]: \min \{v^{OPT}[P^S(u)] : u \in U\}$$

ここで $\{v^{OPT}[\cdot]$ は問題 $[\cdot]$ の最適な目的関数値かつ

$$U = \{u \in R^m : \sum_{j=1}^m u_j = 1, u \geq 0\}.$$

代理双対問題の最適解を X^{SD} 、最適な代理乗数を u^* とする。最適解 X^{SD} は多くの場合、代理双対ギャップ (surrogate duality gap) の範囲に含まれる。すなわちこのギャップは、主問題の制約条件において実行不可能解となる領域のことである。

2. 標的問題

主問題の最適解を求めるために、 u^* を使って X^{SD} の近辺の解を列挙する。このために、次の標的問題を考える。

$$[P^T(f^T, u^* b)]: \text{Enumerate all solution } x$$

$$\text{hitting a target } f^0(X) \geq f^T$$

$$\text{subject to } u^* g^0(X) \leq u^* b^T$$

$$X \in K^0,$$

標的値 f^T は、

$$f^0(X^{Near}) \leq f^T \leq f^0(X^{SD})$$

の範囲内で決める。

ここで、 X^{Near} は他の近似解法で求めた最適解である。この標的問題を用いて、大規模な離散最適化問題のより良い近似解を求めるための解法アルゴリズムをポートフォリオ選択問題に適用する。

3. ポートフォリオ選択問題

ポートフォリオとは金融資産の組み合わせで、分散投資することによって利益を最大化させ、リスクを最小化させることが目的である。

一般にリスクの小さいものは利得率が低いと考えられている。利得率の高い証券でもリスクが大きければ好ましくないが、比較的利得率の高い2証券の相関関数が低いものを選べば一方が下がっても、他方があまり下がらないため、場合によっては上がって一方の損失を吸収するため互いの相手のリスクを吸収し、利得率は比較的高く維持できる。

従来ポートフォリオ問題では過去の利得率の平均やリスクの分散・標準偏差を元に将来予測し、投資選択が考えられてきたが、相場が変動し、理論による予想と現実がかなり離れているという問題がある。

相場の変動要因として考えられるものとして

- 1) 政治経済的なもの
景気、金利、為替、原油価格、海外市場
- 2) 個別企業の要因
輸出比率、利益成長率、業種、企業規模、PER (株価/一株あたり純資産)、PBR (株価収益率)
- 3) 投資家による心理
が挙げられる。

1) の為替、2) の輸出比率、業種を考えると、
(1) 輸出比率の高い企業・業種
円安の時に株価が上がり、円高のときに株価が上がる企業

業種：自動車・電機・機械
(2) 輸出比率の低い企業
円高の時に株価が上がり、円安のときに株価が下がる

業種：石油・電力・ガス
(3) 輸出入に関係しない企業・業種
円相場の影響を受けにくい

業種：サービス・通信

1) の景気、2) の業種によるものでは建設・不動産・金融が考えられる。

3) の投資家の心理を考えると、利益の場合と損失の場合とは違いが見られる。

2種類の利益と損失の選択では利益を選択する場合

- (1) 2万円 50%、なし 50%
- (2) 1万円 100%

ではほぼ選択する割合が同じだが損失を選択する場合

- (1) なし 50%、-2万円
- (2) -1万円 100%

では損失1を選択する傾向がある。

そこでポートフォリオ選択問題を

目的関数：利益

制約条件：1株益、1株配当、円高・円安それぞれの最低限の利益

とする離散最適化問題と考える。研究手順は

- 1) 一定期間のデータの採取
- 2) 業種別に分類する
- 3) 同業種で最適組み合わせを計算する
- 4) 3) で計算した業種を組み合わせで計算するとし、計算結果について発表を行う。

4. 参考文献

仲川 勇二

『離散最適化問題のための新解法』

電子情報学会論文誌 84/1 Vol. J73-ANo3

仲川 勇二・疋田 光伯・鎌田 弘

『代理双対を解くためのアルゴリズム』

電子情報学会論文誌 84/1 Vol. J67-ANo1

松原 望

現代人の統計 新版 意思決定の基礎

久保田 敬一

ポートフォリオ理論