

ネットワーク均衡モデル上における2つの企業の合併効果について

01605850	NTT コミュニケーションズ (株)	*松林 伸生	MATSUBAYASHI Nobuo
02004620	慶應義塾大学	梅澤 正史	UMEZAWA Masashi
01605860	慶應義塾大学	増田 靖	MASUDA Yasushi
01400760	慶應義塾大学	西野 寿一	NISHINO Hisakazu

1 はじめに

昨今の通信業界のM&Aブームに見られるように、さまざまな競合ネットワークが相互接続されている現実世界においては、しばしばネットワークを構成する複数の企業間で合併が行われる。本稿では、古典的なネットワーク均衡モデルを用いて、このようなネットワーク上の2つの企業の合併効果に関して定性的な知見を得ることを試みる。具体的には、ネットワーク上の各々の企業が所有する n 個のノードの利用価格と混雑コストに基づいてユーザが最適行動を行うとの仮定のもとで、各企業が利潤最大化するべくそのノードの利用価格を決定するモデルを考える。その上で任意の2つの企業が合併し、2つのノードの利用価格を単一の企業が決定した場合の、合併効果（合併前と合併後の利潤の差）について考察する。一般に、合併効果を解析的に記述することは困難であるが、本稿では、ユーザの需要関数とノードの混雑コスト関数に線形性を仮定することにより、ネットワーク上の任意の2企業の価格代替効果を代替行列で表すことができることを示す¹。そして、あるケースにおいては、その代替行列の成分の値に基づいて2つの企業の合併効果が推測可能であることを明らかにする。

2 モデル

2.1 ユーザトラフィックの均衡

内点解を仮定（流量が0のルートは予め除去する）し、以下のWardrop均衡を考える。（[2]等を参照）

$$D_{s(r)}^{-1}(z_{s(r)}) = \sum_{i \in r} p_i + v \sum_{i \in r} W_i(y_i), \quad (x_r > 0),$$

$$z = Hx, \quad y = Ax.$$

¹需要が一定の場合についても同様に代替行列で表現可能である。

ここで、

$\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$: ノードの集合

$\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, s\}$: source-sink pair の集合

$\mathcal{R} = \{1, 2, \dots, r\}$: ルート（通過ノードの列）の集合

x_r, y_i, z_j : 各々、ルート r , ノード i , s-s ペア j の流量

x, y, z : 各々、 x_r, y_i, z_j を成分とするベクトル

$p_i \geq 0$: ノード i の利用価格

$vW_i(y_i)$: ノード i における期待混雑コスト ($W_i(y_i)$ はノード i の期待待ち時間、 $v > 0$ は単位待ち時間あたりの混雑コストを表す)

$H = (h_{jr} : j \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{R})$ with $h_{jr} = 1$ if $j = s(r)$ and $h_{jr} = 0$ otherwise

$A = (a_{ir} : i \in \mathcal{N}, r \in \mathcal{R})$ with $a_{ir} = 1$ if $i \in r$ and $= 0$ otherwise.

$D_j(p)$: s-s ペア j における需要関数（ユーザコスト p (= s-s 間で通過するノードの利用価格と期待混雑コストの和) の関数)

$D_j^{-1}(z_j)$: D_j の逆需要関数

2.2 価格均衡と合併効果

Problem (A) (合併前の Bertrand 均衡問題) ノード i における利潤を、

$$\pi_i = p_i y_i(p), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

で表す。ここで、 $y_i(p)$ は $p = (p_1, \dots, p_n)$ が与えられた時の Wardrop 均衡流量である。各企業 i はこの利潤が最大になるように価格 p_i を決定する。

Problem (B) (合併後の Bertrand 均衡問題) 今、一般性を失うことなくノード1と2が合併し、新しい統合企業 $\{1,2\}$ がノード1と2の価格を決定する状況を考える（ネットワークの構造は不変）。この時の各ノードの利潤は、

$$\begin{aligned} \pi_{\{1,2\}} &= p_1 y_1(p) + p_2 y_2(p), \\ \pi_i &= p_i y_i(p), \quad i \geq 3. \end{aligned}$$

で表される。同様にして、各企業はこの利潤が最大化されるように価格 p_i を決定する。

さて、Problem (A) の Bertrand 均衡解を、 p^* 、その時の流量を $y_i^* \equiv y_i(p^*)$ とし、また、Problem (B) に対して同様に、 p^{**} 、 y_i^{**} とすると、ノード 1 と 2 の合併効果は、

$$\begin{aligned}\Delta\pi &= \pi_{\{1,2\}}^{**} - (\pi_1^* + \pi_2^*) \\ &= (p_1^{**} y_1^{**} + p_2^{**} y_2^{**}) - (p_1^* y_1^* + p_2^* y_2^*)\end{aligned}$$

と表すことができる。

2.3 線形モデル

一般に、 p^* や p^{**} を陽表示させることは困難なため、 $\Delta\pi$ を解析的に評価することは難しい。そこで、本稿では、 D_j 及び $W_i(y_i)$ を線形関数と仮定する。このとき、ある非退化の仮定のもとでは、ノードの価格 p と Wardrop 均衡流量 y との関係は、代替行列 Q を用いて、

$$y = Qp - r. \quad (1)$$

の一次式で表すことができる（ネットワークの構造は行列 Q の中に隠れることに注意）。このとき、合併効果を次式で表現することができる。

$$\Delta\pi = -q_{11} p_1^{**2} - 2q_{12} p_1^{**} p_2^{**} - q_{22} p_2^{**2} + q_{11} p_1^{*2} + q_{22} p_2^{*2}, \quad (2)$$

さらに、 p_1^{**} 及び p_2^{**} は、 p_1^* 、 p_2^* 、そして、 Q の対角成分を 2 倍した行列 S (対称かつ negative semidefinite) を用いて、陽に表現することができる。（詳細は当日発表）

3 2ノードの代替効果に基づく合併効果の解析

明らかに、(2) 式により、合併効果は直接計算可能であるが煩雑な計算を必要とする。そこで、ここでは主に合併対象の 2 つのノードの代替効果（代替行列 Q の (1,2) 成分 q_{12} ）に注目するだけで、その合併効果を推測できるようなケースについて考える。

3.1 ネットワーク上で十分に離れた 2 つのノードの合併効果

ノード 1 と 2 が「ほとんど同じネットワークでつながっていない」場合は、代替効果がほとんど無い、すな

わち q_{12} が限りなく 0 に近いことが推測できるが、この時はさらに以下のことが成り立つことが証明される。

Theorem 3.1 Suppose that nodes 1 and 2 belong to two disconnected components. Then, $\frac{\partial \Delta\pi}{\partial q_{12}} \Big|_{q_{12}=0} > 0$.

さらに、 $q_{12} = 0$ では $\Delta\pi = 0$ である事実を用いると、このような 2 つのノードの合併効果については以下のような推測が可能である。

$$\begin{cases} q_{12} > 0 & \Rightarrow \Delta\pi > 0 \\ q_{12} < 0 & \Rightarrow \Delta\pi < 0. \end{cases}$$

3.2 ネットワーク上で相似な関係にある 2 つのノードの合併効果

ノード 1 と 2 が他のノードに対して、経済的にまったく同一の効果を持つ場合、すなわち、 $q_{11} = q_{22}$ 、 $q_{13} = q_{23}, \dots, q_{1n} = q_{2n}$, and $r_1 = r_2$ である場合、ノード 1 と 2 を相似 (similar) な関係にあると呼ぶ。相似な 2 ノードについては、合併前、合併後とも Bertrand 均衡価格が等しくなることが証明できる。

そして、この性質を用いることにより、相似かつ価格代替的な 2 つのノードの合併効果は必ず正であることが証明される。

Theorem 3.2 If nodes 1 and 2 are similar and $q_{12} > 0$, then the merger is profitable.

なお、相似であっても代替効果が負である場合は必ずしも合併効果が正であるとは限らない。（数値例は当日発表）

参考文献

- [1] Matsubayashi, N., Umezawa, M., Masuda, Y. and Nishino, H., "Merger Effect of Two Firms under Network Equilibrium" Working Paper, Faculty of Science and Technology, Keio University.
- [2] Masuda, Y. and S. Whang, Braess's Paradox and Capacity Management in Decentralized Networks, Working Paper, Faculty of Science and Technology, Keio University.
- [3] Zubietta, L., A Network Equilibrium Model for Oligopolistic Competition in City Bus Services, *Transportation Research B* 32-6 (1998), 413-422.