2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

日本シリーズの三重評価モデル
— 再帰的方法 —

01003676 九州大学 岩本 誠一 IWAMOTO Seiichi

1 はじめに

この報告では、前回 [1] の「ミレニアムONシリーズ」を題材にした分析をさらに進めて、プロ野球・日本シリーズが決着するまでの試合数の三重評価を行う。すなわち、試合数を決着集合への到達時刻としてとらえ、その確率分布・期待値・分散を再帰的に求める方法が三重構造になっていることを示す。記号・用語などは [1] にならう。

2 二項確率モデル

日本シリーズでは両チーム（ダイエーと巨人）の勝ち数の対は、**状態空間列** $S_0 := \{(0,0)\}$, $S_1 := \{(1,0),(0,1)\}$, ..., $S_7 := \{(4,3),(3,4)\}$ 上の**マルコフ連鎖** $\{(X_n, Y_n)\}_0^7$ になる。特に、**二項過程**になっている。ただし、ダイエーが勝つ確率は毎試合独立に $p\,(0 \le p \le 1)$ とする。$q\,(= \overline{p} = 1-p)$ は巨人が勝つ確率。ここでは、全状態空間

$$S = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_7,$$

を優勝が決まった状態の集合（**決着集合**）

$$T = \{(4,0),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (3,4),\ (2,4),\ (1,4),\ (0,4)\}$$

と決まるまでの状態の集合（**継続集合**）

$$C = \begin{matrix} & & & (0,0) & & & \\ & & (1,0), & & (0,1) & & \\ & (2,0), & & (1,1), & & (0,2) & \\ (3,0), & & (2,1), & & (1,2), & & (0,3) \\ & (3,1), & & (2,2), & & (1,3) & \\ & & (3,2), & & (2,3) & & \\ & & & (3,3) & & & \end{matrix}$$

に 2 分割する。

3 試合数の三重評価

以下では**部分シリーズ**の全体を導入する。すなわち、各状態 $(i,j) \in S$ に対して**ホークスの** i **勝** j **敗**から新たに始まるシリーズを考える。この部分シリーズを $\mathcal{ON}(i,j)$ で表す。

いま、$\mathcal{ON}$ シリーズが**経路**

$\omega = z_0 z_1 \cdots z_n,\ \ z_k \in C\ (0 \le k \le n-1)\ \ z_n \in T$

を経て終了したとしよう。ただし

$$z_m = (i_m, j_m) \in S_m \ \ \text{すなわち}\ \ z_{i+j} = (i,j).$$

経路 ω が終了する**時点**は $\tau(\omega) = n\ (4 \le n \le 7)$ である。一般に、任意の $\omega \in \Omega$ に対して

$$\tau(\omega) := \min\{k \ge 0 : z_k \in T\}$$

で定義される。確率変数 $\tau = \tau(\omega)$ をシリーズの**終了時点**（または**決着時点**）という。終了時点 τ は T への**到達時刻** hitting time である。いわゆる $\mathcal{ON}$ シリーズが経路 ω を経たとき、$\tau(\omega) = n$ は第 n 試合で決着したことを表している。

次に、$\mathcal{ON}$ シリーズの経路

$$\omega = z_0 z_1 \cdots z_{i+j} z_{i+j+1} \cdots z_n$$

の第 $(i+j)$ 成分（試合）が $z_{i+j} = (i,j)$ であるとしよう。このとき、シフト作用素 $\theta^{i+j} : \Omega \to \widetilde{\Omega}_{i+j}$ を次で定義する：

$$\theta^{i+j}\omega := z_{i+j} z_{i+j+1} \cdots z_n.$$

ここに、$\widetilde{\Omega}_{i+j}$ は Ω の要素の $(i+j)$ 番目以降からなる要素の全体とする。$\mathcal{ON}(i,j)$ シリーズの試合数 τ_{ij} は $\widetilde{\Omega}_{i+j}$ 上に定義された到達時刻である：

$$\tau_{ij} : \widetilde{\Omega}_{i+j} \to \{l, l+1, \ldots, u\},$$
$$l = l(i,j) := (4-i) \wedge (4-j),$$
$$u = u(i,j) := 7-i-j.$$

事実、任意の $\omega' = z'_0 z'_1 \cdots z'_m \in \widetilde{\Omega}_{i+j}$ に対して

$$\tau_{ij}(\omega') := \min\{k \ge 0 : z'_k \in T\}$$

で定義される。

定理 3.1 (到達時刻)
ω の第 $(i+j)$ 成分が $z_{i+j} = (i,j)$ のとき

$$\tau(\omega) \;=\; i + j + \tau_{ij}(\theta^{i+j}\omega).$$

さて、$\mathcal{ON}(i,j)$ シリーズが終了するまでの試合数 τ_{ij} の確率分布

$$p_{ij}(k) := P_{(i,j)}(\tau_{ij} = k) \quad k = l, l+1, \ldots, u$$

を考えると、次の後向き再帰式が成り立つ:

定理 3.2 (確率分布)

$$\begin{cases} p_{ij}(k) = p \cdot p_{i+1j}(k-1) + q \cdot p_{ij+1}(k-1) & on\ C \\ p_{ij}(0) = 1 & on\ T. \end{cases}$$

これを解いて確率分布が求まる (表 1)《発表時、報告予定》。

ホークスが i 勝 j 敗のときから、[有限時間内に!!] シリーズが終了する確率は (もちろん 1 であるだろが、三重評価のために次に敢えて導入すると、)

$$P_{(i,j)}(\tau_{ij} < \infty) \;=\; \sum_{k=l}^{u} P_{(i,j)}(\tau_{ij} = k)$$

で表される。このシリーズ終了確率を

$$p(i,j) := P_{(i,j)}(\tau_{ij} < \infty) \quad (i,j) \in S$$

で表す。このとき、後向き再帰式が成り立つ:

定理 3.3 (終了確率)

$$p(i,j) = p \cdot p(i+1,j) + q \cdot p(i,j+1) \qquad (i,j) \in C$$
$$p(i,j) = 1 \qquad (i,j) \in T.$$

この解は $p(i,j) = 1$ on S になる。

また、シリーズ終了までの試合数 τ_{ij} の期待値

$$e(i,j) := E_{(i,j)}[\tau_{ij}] \quad (i,j) \in S$$

は次の再帰式を満たす:

定理 3.4 (平均試合数)

$$e(i,j) = p(i,j) + p \cdot e(i+1,j) + q \cdot e(i,j+1) \qquad (i,j) \in C$$
$$e(i,j) = 0 \qquad (i,j) \in T.$$

同じく終了するまでの試合数の自乗 τ_{ij}^2 の期待値

$$q(i,j) := E_{(i,j)}[\tau_{ij}^2]$$

に対してしては、

定理 3.5 (2次モーメント)

$$q(i,j) = -p(i,j) + 2e(i,j) + p \cdot q(i+1,j) + q \cdot q(i,j+1) \qquad (i,j) \in C$$
$$q(i,j) = 0 \qquad (i,j) \in T.$$

さらに、終了までの試合数 τ_{ij} の分散

$$v(i,j) := E_{(i,j)}[(\tau_{ij} - e(i,j))^2]$$

は次を満たす:

系 3.1 (部分シリーズとしての分散)

$$v(i,j) = pq(e(i+1,j) - e(i,j+1))^2 + p \cdot v(i+1,j) + q \cdot v(i,j+1) \qquad (i,j) \in C$$
$$v(i,j) = 0 \qquad (i,j) \in T.$$

他方、

$$V(i,j) := E_{(i,j)}[(\tau_{ij} - e)^2] \qquad e = e(0,0)$$

とすると、$V(0,0)$ は、シリーズ (ホークス 0 勝 0 敗からの) 終了までの試合数 $\tau = \tau_{00}$ の分散を表している:

$$V(0,0) = v(0,0) = q(0,0) - e^2(0,0).$$

次を解いても、試合数の分散が求められる:

定理 3.6 (シリーズ全体での分散)

$$V(i,j) = -(1+2e)p(i,j) + 2e(i,j) + p \cdot V(i+1,j) + q \cdot V(i,j+1) \qquad (i,j) \in C$$
$$V(i,j) = e^2 \qquad (i,j) \in T.$$

参考文献

[1] 岩本誠一, ミレニアムONシリーズの経済効果 — マルコフモデルによる評価 —, 日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集, 2001, pp.108-109.