OEルーチングを用いたセントラルサーバ型待ち行列の利益最大化問題

02103590 電気通信大学電子情報学専攻 ＊川崎 栄一 Kawasaki Eiichi
01703040 東北大学大学院経済学研究科 山下 英明 Yamashita Hideaki
01600230 電気通信大学システム工学科 松井 正之 Matsui Masayuki

１．はじめに

セントラルサーバ型待ち行列モデルのルーチングには、選択、固定、オーダードエントリー（OE）ルーチングなどが知られている。本研究では、客によってもたらす利益が異なるOEモデルを考え、セントラルサーバのサービス率、各ステーションのサービス率分配、バッファサイズ、受け入れる客の利益の下限と平均滞在時間や総利益との関係を数値的に求める。

２．モデル

１つのセントラルサーバと２つのステーションからなるセントラルサーバ型待ち行列モデルを考える。

ＯＥルーチングでは、図１のように、あるジョブがセントラルサーバ（ＣＳ）でサービスを終了したときステーション１のバッファに空きがあれば、ステーション１に移動し、ステーション１に空きがなく、ステーション２のバッファに空きがあればステーション２に移動する。もし両方のバッファに空きがなければオーバーフローとなる。どちらかのステーションでサービスを終えた客はシステムから退去する。モデルの解析的な仮定は、以下のようである。

① システムは定常状態である。
② セントラルサーバには無限の客が存在し、平均$\bar{\lambda}$の指数サービスを行う。
③ ステーションは互いに独立な指数サービスで、ステーションiのサービス率を$\mu_i\ (i=1,2)$とし、$\mu_1+\mu_2=1$とする。
④ ジョブの移動時間はゼロとする。
⑤ 各ステーションのバッファサイズをB_iと表す。
⑥ 客のもたらす利益分布は、利益率１の指数分布に従う。
⑦ 利益がc_u以上の客のみ受け入れサービスを行う。このとき受け入れ客の利益の期待値$\alpha^{-1}(c_u)$は、

$$\alpha^{-1}(c_u)=\frac{(1+c_u)e^{-c_u}}{e^{-c_u}} \tag{1}$$

となり、受け入れ客は、到着率

$$\lambda=\bar{\lambda}\left(1-e^{-c_u}\right) \tag{2}$$

のポアソン分布に従うことになる。

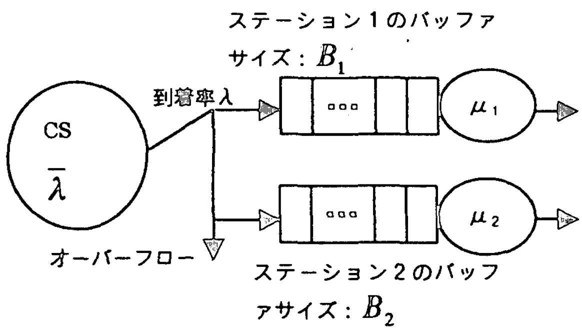

図1. OEルーチングモデル

３．モデル解析

ステーション１にいる客の数をh $(0\le h\le B_1)$、ステーション２にいる客の数をk $(0\le k\le B_2)$とすると状態(h,k)はマルコフ性をもつ。ここではその定常状態確率を$P(h,k)$として、平衡状態方程式を求め、これらを解くことにより平均滞在時間、利益を求める。

まず、定常状態確率$P(h,k)$は以下の平衡状態方程式を解くことによって求められる。

$$\lambda P(0,0)=\mu_1P(1,0)+\mu_2P(0,1) \tag{3}$$

$$(\lambda+\mu_1)P(h,0)=\lambda P(h-1,0)+\mu_1P(h+1,0)+\mu_2P(h,1) \quad (1\le h\le B_1-1) \tag{4}$$

$$(\lambda+\mu_1)P(B_1,0)=\lambda P(B_1-1,0)+\mu_2P(B_1,1) \tag{5}$$

$$(\lambda+\mu_2)P(0,k)=\mu_1P(1,k)+\mu_2P(0,k+1) \quad (1\le k\le B_2-1) \tag{6}$$

$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)P(h,k)=\lambda P(h-1,k)+\mu_1P(h+1,k)+\mu_2P(h,k+1) \quad (1\le h\le B_1-1,\ 1\le k\le B_2-1) \tag{7}$$

$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)P(B_1,k)=\lambda P(B_1-1,k)+\lambda P(B_1,k-1)+\mu_2P(B_1,k+1) \quad (1\le k\le B_2-1) \tag{8}$$

$$(\lambda+\mu_2)P(0,B_2)=\mu_1P(1,B_2) \tag{9}$$

$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)P(h,B_2)=\lambda P(h-1,B_2)+\mu_1P(h+1,B_2) \quad (1\le h\le B_1-1) \tag{10}$$

$$(\mu_1+\mu_2)P(B_1,B_2)=\lambda P(B_1-1,B_2)+\lambda P(B_1,B_2-1) \tag{11}$$

$$\sum_{h=0}^{B_1}\sum_{k=0}^{B_2}P(h,k)=1 \tag{12}$$

しかし、本モデルの場合は、式（４）～式（７）および式（９）、式（１０）を用いると、$P(0,0)$と$P(h,k)$ $(1\le h\le B_1, 0\le k\le B_2)$が$P(0,k)$ $(k\ge 1)$の１次結合として表現することができる。したがって、これらの関係を式（８）と式（１１）に代入し、これらと式（１２）で構成されるB_2元の連立方程式を解くことにより容易に$P(h,k)$を求めることができる。

これにより、ステーションiのスループット（生産率）TH_i、平均系内人数L_iは、

$$TH_1 = \sum_{h=1}^{B_1}\sum_{k=0}^{B_2}\mu_1 P(h,k) \tag{18}$$

$$TH_2 = \sum_{h=0}^{B_1}\sum_{k=1}^{B_2}\mu_2 P(h,k) \tag{19}$$

$$L_1 = \sum_{h=1}^{B_1}\sum_{k=0}^{B_2} hP(h,k) \tag{20}$$

$$L_1 = \sum_{h=0}^{B_1}\sum_{k=1}^{B_2} kP(h,k) \tag{21}$$

で求められ、平均滞在時間STと総利益TBは、

$$ST = \frac{L_1}{TH_1} + \frac{L_2}{TH_2} \tag{22}$$

$$TB = \alpha^{-1}(c_u)(TH_1 + TH_2) \tag{23}$$

で求められる。

4．数値結果

数値結果として、セントラルサーバのサービス率λ、各ステーションのサービス率μ_1,μ_2、バッファサイズB_1,B_2および客の受け入れ利益基準c_uを変化させたときの、スループット、平均滞在時間、総利益を示す。

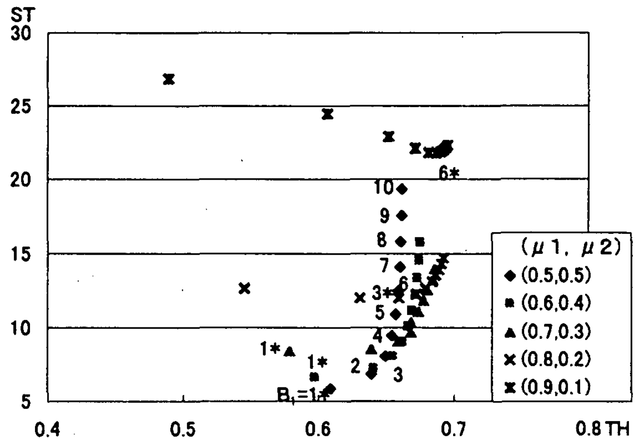

図2．　サービス率分配（μ_1,μ_2）とステーション１のバッファサイズB_1を変化させたときのスループットと平均滞在時間$(\bar{\lambda}=0.7, B_2=3)$

図２ではステーション１のバッファサイズを増加させると、スループットは単調に増加するが、平均滞在時間に関しては、これを最小にするバッファサイズが異なる。これは$\mu_1 > \mu_2$であるため、ステーション１のバッファで客が待っていても、総滞在時間が短くなる場合があるからである。

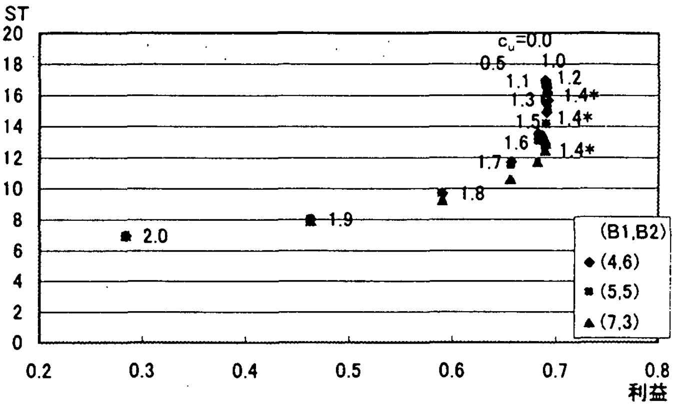

図３．　バッファ配分（B_1,B_2）と客の受け入れ利益基準c_uを変化させたときの総利益と平均滞在時間$(\bar{\lambda}=0.7, \mu_1=0.8, \mu_2=0.2)$

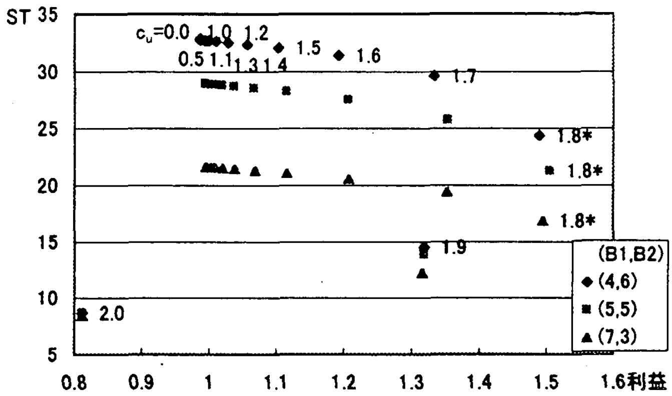

図４．　バッファ配分（B_1,B_2）と客の受け入れ利益基準c_uを変化させたときの総利益と平均滞在時間$(\bar{\lambda}=2.0, \mu_1=0.8, \mu_2=0.2)$

図３では、客の受け入れ利益基準を増加させると、受け入れ客の数は減少するが、受け入れ客のもたらす平均利益は増加するので、総利益については、これを最大にする最適なc_uが存在する。図４では、セントラルサーバのサービス率が大きいため、より大きな利益をもたらす客だけをサービスしたほうが利益が最大になり、その結果、最適なc_uは大きくなる。

5．今後の課題

今回は、ＯＥルーチングに関して、いくらかの結果が得られた。今後は、もたらす利益が高い客はステーション１に、低い客はステーション２へ割り当てるモデルにおいて、その割り当てる基準をどのように設定すればよいかを考えていく予定である。