2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

# ネットワーク効果を考慮に入れた評価システム(2)

01109213　金沢学院大学　°桑野裕昭　KUWANO Hiroaki
01404983　富山商船高等専門学校　成瀬喜則　NARUSE Yoshinori
01603713　金沢大学　前田　隆　MAEDA Takashi

## 1　はじめに

意思決定を行う場合，我々は実行可能な代替案の中から評価基準に対して最も適した代替案を選択する．この代替案および評価基準が数理モデルとして定式化される場合には，数理計画法の各種のアプローチにより最適な解を得ることができる．しかしながら，現実世界の問題においては評価を行う場合の基準は複数であることが珍しくはないうえ，デザインや感覚といった必ずしも数理モデルで表現することが適切ではない基準が採用されることもしばしば行われる．また，代替案の一つひとつが評価基準に与える影響を正確に定量化することも必ずしも容易ではない状況も多数存在する．このような状況下において，我々は階層化意思決定法 (Analytic Hierarchy Process: AHP) を用いて，意思決定者の直観的な判断や経験による判断などに基づく主観的あるいは定性的評価の定量化を行うことができ，最善の代替案の選択が可能となるとされている．

では，次のような意思決定問題を AHP を用いて考えよう．([1])

> ある意思決定者が情報収集のための機器購入を考えている．予算の制約により機器 1, 2, 3 の 3 種類のうちのいずれか一点のみ購入するものとする．(簡単のため，評価基準は「情報収集」のみとする．)

この問題に AHP を適用すれば容易に適切な購入対象を選択できる．ここで，この問題に次の条件を加えて考えよう．

> [条件] 購入された機器以外についても後日，購入できる可能性があり，さらにこれらの機器は単独で用いるよりも複数同時に用いた方がその情報収集効率は高くなる．そこで情報機器の拡張性を加味した上で 1 種類のみ購入したい．

一般に，AHP において代替案や評価基準は一つ上の階層に属する評価基準によって一対比較されるが，同一の階層に属する代替案や評価基準間では特定の関係がない (独立である) と仮定される．この場合，単純に機器を一対比較しても拡張性までは取り扱うことができず，AHP をそのまま適用することはできない．そこで，筆者らは [1] において，3 種類の情報機器を全体集合とし，その非空な部分集合を代替案と考えて AHP を適用し，更にゲーム理論的アプローチにより，個々の機器の拡張性まで含んだ評価値を与えた．また，このような他の機器との相乗効果まで含めた機器の評価の方法を「ネットワーク効果を考慮に入れた評価システム」と呼んだ．

本報告においては，ネットワーク効果を考慮に入れた評価システムにおける相乗効果を $\lambda$-ファジィ測度のパラメータによって表現することを試み，前者のシステムによる評価との関連性について検討する．

## 2　モデル

[1] に従い，機器 $i, i = 1,2,3$ を単に $i = 1,2,3$ によって表し，$N = \{1,2,3\}$ とおく．また，$2^N$ により $N$ の部分集合全体を表す．

次に $2^N$ 上の $\lambda$-ファジィ測度 $g_\lambda$ $(-1 < \lambda < \infty)$ を次式により定義する．([2])

$$g_\lambda(N) = 1,$$

$$g_\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left\{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E_j)\right) - 1\right\}, & \text{as } \lambda \neq 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_\lambda(E_j), & \text{as } \lambda = 0. \end{cases}$$

ただし，$\{E_1, \cdots, E_n\}$ は $N$ の任意の互いに素な部分集合族である．このとき，$g_\lambda$ の値域は単位区間 $[0,1]$ であり，$g_\lambda(\emptyset) = 0$ および単調性:$E, F \in 2^N, E \subset F \Rightarrow g_\lambda(E) \leq g_\lambda(F)$ を満足する．さらに，任意の $E, F \in 2^N$ に対して

$$g_\lambda(E \cup F) = \frac{g_\lambda(E) + g_\lambda(F) - g_\lambda(E \cap F) + \lambda g_\lambda(E) g_\lambda(F)}{1 + \lambda g_\lambda(E \cap F)}$$

が成り立つ．特に $E, F \in 2^N$ が $E \cap F = \emptyset$ を満たすならば，

$$g_\lambda(E \cup F) = g_\lambda(E) + g_\lambda(F) + \lambda g_\lambda(E) g_\lambda(F) \qquad (1)$$

が成り立ち，これによって相互関係を表現できると考える．以下では，意思決定者が内在的に $\lambda$-ファジィ測度 $g_\lambda$ を持つと仮定して，意思決定者のそれの同定を試みる．

## 3 解析

まず，[1] の表 1 によって示された AHP の結果を $N$ の重要度が 1 となるように変数変換を行う．No.1 の学生の結果を示すと

$$a_1 = g_\lambda(\{1\}) = 0.05 \qquad a_2 = g_\lambda(\{2\}) = 0.05$$
$$a_3 = g_\lambda(\{3\}) = 0.10 \qquad a_4 = g_\lambda(\{1,2\}) = 0.17$$
$$a_5 = g_\lambda(\{2,3\}) = 0.26 \qquad a_6 = g_\lambda(\{3,1\}) = 0.18$$
$$a_7 = g_\lambda(N) = 1.00 \qquad a_8 = g_\lambda(\emptyset) = 0.00$$

となる．また，この学生の持つ $\lambda$-ファジィ測度が単調性を満足していることは容易に確認できる．次に $\lambda$-ファジィ測度 $g_\lambda$ を同定するため定義式及び式 (1) により以下の連立方程式系を得る．

$$\begin{aligned}
a_4 &= a_1 + a_2 + \lambda a_1 a_2 \\
a_5 &= a_2 + a_3 + \lambda a_2 a_3 \\
a_6 &= a_3 + a_1 + \lambda a_3 a_1 \\
a_7 &= a_1 + a_5 + \lambda a_1 a_5 \\
a_7 &= a_2 + a_6 + \lambda a_2 a_6 \\
a_7 &= a_3 + a_4 + \lambda a_3 a_4 \\
1 + \lambda a_7 &= (1 + \lambda a_1)(1 + \lambda a_2)(1 + \lambda a_3)
\end{aligned}$$

この連立方程式系は一般に解を持たないため，制約付最小自乗法を適用する．すなわち，目的関数

$$\begin{aligned}
f(x) = \ & \{a_4 - (a_1 + a_2 + a_1 a_2 x)\}^2 \\
& + \{a_5 - (a_2 + a_3 + a_2 a_3 x)\}^2 \\
& + \{a_6 - (a_3 + a_1 + a_3 a_1 x)\}^2 \\
& + \{a_7 - (a_1 + a_5 + a_1 a_5 x)\}^2 \\
& + \{a_7 - (a_2 + a_6 + a_2 a_6 x)\}^2 \\
& + \{a_7 - (a_3 + a_4 + a_3 a_4 x)\}^2 \\
& + \{(1 + a_7 x) - (1 + a_1 x)(1 + a_2 x)(1 + a_3 x)\}^2
\end{aligned}$$

を $-1 < x < \infty$ の条件の下で最小化する．この数理計画問題の最適解 $x^*$ により，意思決定者の持つ $\lambda$-ファジィ測度のパラメータを $\lambda = x^*$ と与える．
No.1 の学生の例に適用すると最適解 $x^* = 39.81$ を得るので，この学生の評価はパラメータ $\lambda = 39.81$ の $\lambda$-ファジィ測度によっていると考えることができる．同様に No.2, 3, 4, 5 の学生についてそれぞれ計画問題を解き，パラメータ $\lambda$ を求めたものが表 1 である．式 (1) から分かるように，このように得られたパラメータ $\lambda$ によって，意思決定者が内在的に持つ相乗効果 (ネットワーク効果) を定量的に表示することが可能となった．また，$g_\lambda(\{1\}), g_\lambda(\{2\}), g_\lambda(\{3\})$ 及び $\lambda$ によって $\lambda$-ファジィ測度を再構成し、[1] における代替案評価関数 $v = g_\lambda$ と定義する．このとき、得られるネットワーク効果を考慮した評価値 $\phi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ も [1] のそれとほぼ同じ値をとることが分かった．(表 1)

表 1: 学生毎のパラメータ $\lambda$

| No. | $\lambda$ | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 39.81 | 0.31 | 0.29 | 0.40 |
| 2 | 21.44 | 0.20 | 0.40 | 0.39 |
| 3 | 8.82 | 0.34 | 0.30 | 0.36 |
| 4 | 17.17 | 0.22 | 0.42 | 0.36 |
| 5 | 28.91 | 0.23 | 0.44 | 0.33 |

## 4 まとめ

本研究では，[1] において提案した評価システムでは，見いだすことができなかったネットワーク効果の定量的表現を $\lambda$-ファジィ測度のパラメータにより与えられることを示した．また，$\lambda$-ファジィ測度によって [1] における代替案評価関数 $v$ を定義しても同様の評価値が得られることを数値例によって示した．

今後の課題として，AHP によって得られた重要度に単調性がない場合にはこの手法は適用できない為，拡張について考察が必要であると考えている．また，$\lambda$-ファジィ測度を用いた評価の近似が適切であるかについての検討や評価関数 $v$ の持つべき条件を定め，それを満足する関数のクラスについて検討したい．

## 参考文献

[1] 成瀬喜則, 桑野裕昭, 前田隆, “ネットワーク効果を考慮に入れた評価システム (1)”, 2002 年度日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 2002.

[2] Z. Wang and G.J. Klir, *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press, New York, 1992.