

連続時間マルコフ連鎖を用いた 配置問題について

02005163 南山大学 *稲川 敬介 INAKAWA Keisuke
01204423 南山大学 鈴木 敦夫 SUZUKI Atsuo

1 はじめに

配置問題にはメディアン問題など様々な指標があるが、時間的な要素を取り入れたモデルは少ない。しかし、配置する施設が救急車など実質的には施設のほうが移動する場合(出前型施設 [4]), 施設がサービス中で新たな客に対応できないという状況もある。このような場合を考慮するため、待ち行列理論の手法を用い、連続時間マルコフ連鎖を適用したモデルを提案する。また簡単な数値例を一般的な汎用ツールで計算し、その結果を考察する。

2 モデルの目的と性質

移動する施設をサーバーと呼び、客がサーバーを呼び出す行為を呼という。サーバーが既にサービス中であるため新たな呼に対応できない状況をビジー状態にあるといい、全てのサーバーがビジー状態にある確率を最小にすることをモデルの目的とする。

1つのサーバー S_1 と需要点である2つのノード N_1, N_2 を持つネットワーク(図1)を考える。 N_1, N_2 は枝で連結されていて、ノードまたは枝上のいずれにも配置可能とする。また、各ノードの発生率 λ_j 、サービス率 $\mu_j, j=1, 2$ はわかっているものとする。更にマルコフ性と平衡状態を仮定する。これにより推移図2から平衡方程式を得る。状態0にある確率を P_0 で表せば、全てのサーバーがビジーである状態にある確率は $1 - P_0$ で表される。

$$P_0 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2}. \quad (1)$$

S_1 がある地点 X から N_1 までの距離を x とおき、距離を時間に変換する関数が $\tau(x) = Ax + B, A > 0$ と得られているものとすれば、サービス率は平均サービス時間の逆数であるので(1)式は以下のように書き換えることができる。

$$P_0 = \frac{1}{2A(\lambda_1 - \lambda_2)x + \beta}. \quad (2)$$

ここで β は x に関しない部分全てを表している。これにより図1のネットワークでは、 N_1 上か N_2 上の

いずれかにサーバーを配置することが最適解の一つであることがわかった。

n ノード存在するときも P_0 が求められ、上記と同じ結果が得られる。よってこの問題でもノード上への配置のみを考えれば良く、Hakimi の定理 [1] と同じ性質を持つことがわかった。

3 モデルの定義

ある自治体などが管理するひとまとまりの地域をシステム全体と見ることとする。地域は更に細かな区域 $A_r, (r=1, \dots, n)$ に分けられている。配置可能な場所は $X_q, (q=1, \dots, m)$ で表わす。各区域には距離 $d(X_q, A_r)$ が与えられていて、サーバーがどちらもアイドルであるときは、近い方から優先的にサービスされると約束する。さらに、各区域はサービスの優先順位により特定の地区に統合可能であると仮定する。

3.1 (2S,2D) モデル

二つのサーバーを $S_i, i=1, 2$ で表わし、各区域は優先順位により二つの地区に統合される。このような問題を(2S,2D)モデルと呼ぶ。各地区 $N_j, j=1, 2$ の発生率は λ_j で与えられているとする。どのサーバーによって処理されるかはそのサービス率を変化させるので、 S_i によって処理される N_j の客のサービス率を $\mu_{i,j}$ とする。このとき推移図3が与えられる。ここで状態 $t, t', (t, t' \in J, J = \{0, 1, 2\})$ は S_1 が客 t を、 S_2 が客 t' をサービス中(あるいはアイドル状態)であることを表している。

ここでも前節と同じように各状態の確率を求め、全てのサーバーがビジーである確率 p_l を得ることができる。ただし??節のように解析的に解を求めることは難しいので、連続時間マルコフ連鎖の推移行列を用いて数値的に計算する。

$$p_l = P_{1,1} + P_{1,2} + P_{2,1} + P_{2,2}. \quad (3)$$

p_l は対応できなかった呼(溢れた呼)の割合でもあり、このモデルでは、具体的に p_l の値を求めることによ

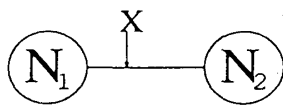


図 1: (1S,2D) のネットワーク

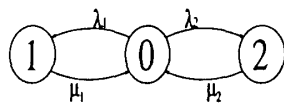


図 2: (1S,2D) の推移図

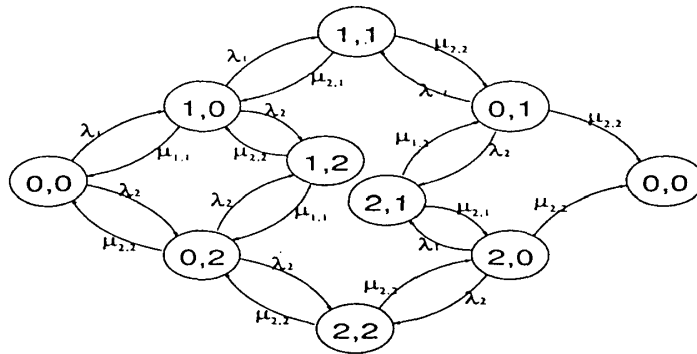


図 3: (2S,2D) モデルの推移図

り、サーバー数 (処理能力) が妥当であるかどうかとも判断することができる。

3.2 (3S,6D) モデル

3 サーバーのモデルでは最大で ${}_3P_3 = 6$ 種類の呼が存在する。“最大”でとしたのは、配置の仕方によって生成されない順列もあることを意味している。また、1つのサーバーに対し状態の種類が7つ存在するので、重複を許した順列の総数によりこのモデルでは最大で ${}_7P_3 = 7^3$ の状態が存在する。これらを考慮した行列を与えることにより (2S,2D) モデルと同様に解くことができる。

4 サーバー平均到着時間

ここではサーバーの平均到着時間 r を考える。サーバー S_i が客 C_j の場所までにかかる平均時間を $\nu_{i,j}$ とする。次の呼はそれぞれ $\lambda_t / \sum_{j \in J} \lambda_j, t \in J$ の割合で発生するので、各状態におけるサーバーの平均到着時間は、この割合にそれぞれの $\nu_{i,j}$ を対応させることによって得られる。ただし、全てのサーバーがビジーなときはそれ以降に発生した呼を無視するとしていたので、このときは到着時間を定義できない。よってサーバー平均到着時間の最小化は、 p_i が十分に小さな定数以下という制約の下で行われる。

5 数値例

ある自治体が下のような 25 の区域をもち、2 または 3 のサーバーを配置する問題を考える。区域内の数字は平均発生時間間隔で、配置可能な場所を * で表す。サーバーは 1 区域移動するのに平均 1 単位の時間を必要とし、移動以外には平均 5 単位時間必要とする。

	A	B	C	D	E
1	232	226	230	*236	240
2	222	*224	227	226	239
3	225	228	222	225	229
4	*224	222	*224	225	226
5	225	226	228	232	*235

このとき 2 サーバーを (B2,C4) に配置するのが最適で、そのとき $p_i = 0.2117$ であった。この結果を見ると 2 割強対応できないことがわかる。これを 3 サーバーにして解くと (A4,B2,C4) に配置するのが最適で、そのとき $p_i = 0.0635$ であった。これならば 9 割以上に対応可能となった。

一方このときのサーバー平均到着時間は、2 サーバーで $r = 3.5287$, 3 サーバーで $r = 3.6684$ となった。これはより多くの客を対応したことによって平均到着時間が上がってしまった例の一つである。

参考文献

- [1] S. L. Hakimi, "Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph," *Opns. Res.* 12, 450-459 (1964).
- [2] 宮沢政清, "確率と確率過程," 近代科学社, 1993.
- [3] 岡部篤行, 鈴木敦夫, "最適配置の数理," 朝倉書店, 1992.
- [4] 谷村秀彦, 梶秀樹, 池田三郎, 腰塚武志, "都市計画数理," 朝倉書店, 1986.
- [5] Ronald W. Wolff, "STOCHASTIC MODELING AND THE THEORY OF QUEUES," Prentice Hall, Inc., 1989.