

連続型重力モデルの下での距離分布の理論

01107680 慶應義塾大学 栗田 治 KURITA Osamu

1. 緒言

領域内で移動の始点と終点が、ある密度で分布しているときの2点間距離分布を所与とする。これを前提として、任意に与えられたトリップ密度(移動の頻度が距離に依存する様子を表す函数)の下での距離分布を定式化する。そして無制約型という初等的な想定の下で、(1)古典的な重力モデルならびに(2)指数型重力モデルという2種類のトリップ密度を取り上げ、円盤内の一様な2点間の距離分布を対象とした具体的な計算を行う。このとき、(a)直線距離ならびに(b)放射・環状距離の、重力モデルに基づく距離分布とその平均や分散を陽に導出することが出来る。ただし紙面の制約から、本稿では直線距離の結果のみを記述する。

都市解析学では、連続平面の重力モデルがよく用いられる。しかし、後述するような冪型重力モデルと指数型重力モデルの著しい相違は殆ど認識されていないように思われる。また本稿の内容は、都市交通計画における内々トリップ長分布の分析や、内々平均距離の設定に役立てることが出来よう。さらに、都市内道路パターン設計法が交通現象に与える影響を考察(推察)するための基礎となるものと思われる。

2. 連続型重力モデルの定式化

領域内に分布する2点間距離 X の(空間的な隔たりによるトリップ数の減衰を考慮しない)確率密度函数(例えば円盤内の一様な2点間の直線距離の分布)を $\varphi(x)$ とする ($0 \leq x \leq x_{\max}$)。ここでトリップ密度が始・終点間の所要時間 Z の減衰函数で表されるものとし、これを $\tau = \tau(z)$ で与える。ただし、距離 X を計測する長さの単位に対応する速さの定数 v を用いると $X = vZ$ なる関係があるものとしておく。

このとき、長さ x だけ離れた2地点間のトリップ密度は $\tau(x/v)$ と表される。密度を導入するに当たり、こうした一見すると迂遠なる方法を探った理由は、距離の単位の相違(km, マイルなど)による影響を排除してトリップ密度を導入せんがためである。なお、 Z を所要時間でなく始・終点間の歩数とし、 v を一步当りの長さで見做しても、ここでの議論は成立する。

さて、以上に基づけば、都市の始・終点ペアの総量を1と規準化したときの、 x 以上 $x + \Delta x$ 未満のトリップ数が $\tau(x/v)\varphi(x)\Delta x$ となる。したがって地域内総トリップ数 V は次のように算出される：

$$V = \int_0^{x_{\max}} \tau\left(\frac{x}{v}\right) \varphi(x) dx. \quad (1)$$

こうしてトリップ密度 $\tau(x)$ を前提とする距離 X の確率密度函数 $f(x)$ が次の通りに与えられる：

$$f(x) = \frac{\tau\left(\frac{x}{v}\right) \varphi(x)}{V}. \quad (2)$$

ここで特にトリップ密度が $-\lambda$ 次同次函数であるものとしよう(後述の冪型重力モデルは正にこのタイプ)：
 $\tau_H(x/v) = v^\lambda \tau_H(x)$. このとき(1)は

$$V = v^\lambda \int_0^{x_{\max}} \tau_H(x) \varphi(x) dx \quad (3)$$

となるので、 x の密度函数は(2)から次式に帰着する：

$$f_H(x) = \frac{\tau_H(x) \varphi(x)}{\int_0^{x_{\max}} \tau_H(x) \varphi(x) dx}. \quad (4)$$

(4)式の距離分布が定数 v に依存していないことは示唆的である。すなわち次が成立する：【定理】トリップ密度が所要時間の同次函数ならば(冪型重力モデルはその典型)、トリップ長分布は移動速度に依存しない。同次トリップ密度函数の下では、距離を測定するに当たってどのような単位を用いようとも、共通の λ 値で計算してよく、単位間の換算も必要ない。

3. 円盤都市で一様な2点間の直線距離

半径 α の円盤上で一様な2点間の距離 X の確率密度函数は(5)の通りに与えられる¹⁾(概形は図1)。その平均値が $\langle X \rangle = 128\alpha / (45\pi)$ であることはよく知られている(因みに最頻値は 0.8362α)。

$$\varphi(x) = \frac{4x}{\pi\alpha^2} \arccos \frac{x}{2\alpha} - \frac{x^2}{\pi\alpha^4} \sqrt{4\alpha^2 - x^2}. \quad (5)$$

$(0 \leq x \leq 2\alpha)$

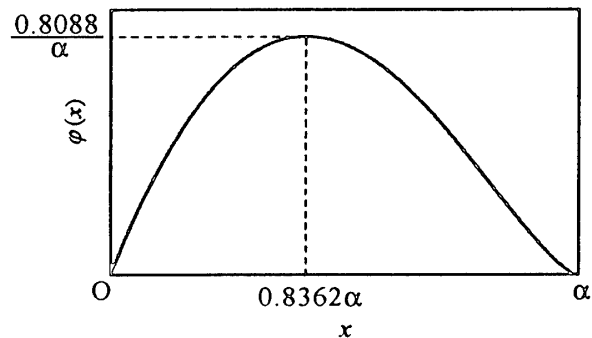


図1 2点間の直線距離の確率密度 $\varphi(x)$ 。

3.1 冪型重力モデル

トリップ密度を古典的な冪型重力モデルで与える：

$$\tau_G(z) = \frac{1}{z^\lambda} \quad (\lambda < 2). \quad (6)$$

総トリップ数は(3)より次の如くに算出される：

$$V_G = v^\lambda \frac{2\Gamma(3-\lambda)}{\alpha^\lambda (2-\lambda) \Gamma(2-\frac{\lambda}{2}) \Gamma(3-\frac{\lambda}{2})}. \quad (7)$$

直線距離 X_G の確率密度は (4) によって次の通り:

$$f_G(x_G) = \frac{\alpha^\lambda (2-\lambda) \Gamma(2-\frac{\lambda}{2}) \Gamma(3-\frac{\lambda}{2})}{2\Gamma(3-\lambda)} \cdot \frac{\varphi(x_G)}{x_G^\lambda} \quad (8)$$

図2に総トリップ数の概形を示す。これを見ると、 $\lambda < 0$ のときは総トリップ数が λ の単調減少関数であるものの、 $0 \leq \lambda$ の範囲では単調ではない。そして、 λ が下から2に近づくとき、総トリップ数は発散する(これは文献2)にも見られる普遍的な性質である)。また、 $\lambda = 0$ のときは距離によるトリップ密度の変化が無いのだから、当然、総トリップ数は1である。

図3は距離分布 $f_G(x_G)$ の概形である。 λ が大きくなるほど、分布の裾が軽くなってゆくのが見て取れる。

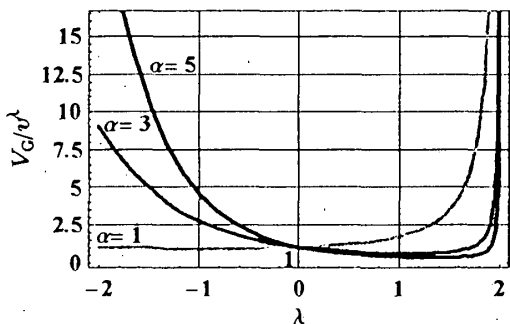


図2 λ を変化させたときの総トリップ数 V_G の変化 (円盤の半径が $\alpha = 1, 3, 5$ の3つの場合を示す)。

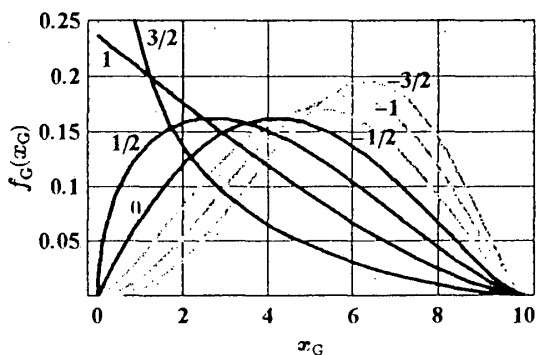


図3 距離分布 $f_G(x_G)$ の概形 (円盤の半径は $\alpha = 5$ に固定し、 λ は $-3/2$ から $3/2$ まで $1/2$ 刻み)。

(8) に基づく平均距離 $\langle X_G \rangle$ は次の通りである:

$$\frac{\langle X_G \rangle}{\alpha} = 2^{2-\lambda} (2-\lambda) \left\{ \Gamma\left(2-\frac{\lambda}{2}\right) \right\}^2 \Gamma\left(3-\frac{\lambda}{2}\right) \times \left\{ \frac{4}{(\lambda-3)^2 \Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)} \right\} / \{\sqrt{\pi} \Gamma(3-\lambda)\} \quad (9)$$

平均2乗距離 $\langle X_G^2 \rangle$ もガンマ関数によって記述できるが割愛する。平均距離を λ でマクローリン展開し2次の項まで示しておく(近似の具合は図4に示す):

$$\begin{aligned} \frac{\langle X_G \rangle}{\alpha} &\approx \frac{128}{45\pi} - \frac{32(120 \ln 2 - 67)\lambda}{675\pi} \\ &+ \frac{16(809 - 50\pi^2 + 20 \ln 2(60 \ln 2 - 67))\lambda^2}{3375\pi} \\ &= 0.905415 - 0.244125\lambda - 0.554624\lambda^2. \quad (10) \end{aligned}$$

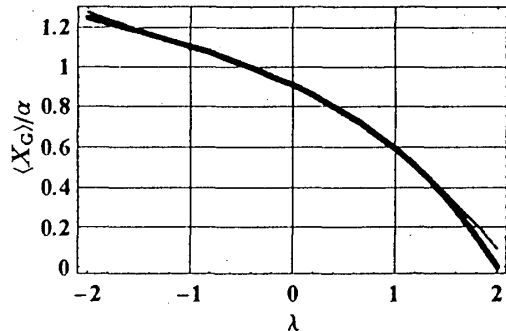


図4 λ を変化させたときの平均距離 $\langle X_G \rangle$ の変化 (細い曲線の方は (10) 式による2次近似)。

$\langle X_G \rangle$ が λ に依存する様子を図4に示す。 λ が $-2, -1, 0, 1, 2$ のとき、平均距離は順に $\frac{2048}{525\pi}\alpha, \frac{45\pi}{128}\alpha, \frac{128}{45\pi}\alpha, \frac{3\pi}{16}\alpha, 0$ である。すなわち λ が左から2に近づくとき、平均距離は0に収束する。実は X_G の標準偏差の方は $\lambda \in [0, 2]$ で単調な関数ではない ($\lambda = 0.6794$ で最大値をとる)。これらは、 λ が2に近づくとき、全トリップに対して距離0に限りなく近いトリップの数が占める率が1に漸近することによる。図2の、総トリップ数が λ の単調関数でないという性質と合わせて、連続型のモデリングに幕型重力モデルを適用する場合に注意すべき点である。

3.2 指数型重力モデル

トリップ密度を指数型重力モデルで与える:

$$\tau_E(z) = e^{-\mu z} \quad (11)$$

(1) によって総トリップ数 V_E を求めると、特殊関数を含むやや煩雑な形式に帰着する。 $\xi = \mu\alpha/v$ と定義するとき (ξ は無名数であり、円盤の半径分の移動時間が持つトリップ密度減衰効果を表す)、 V_E は ξ のみの(単調減少な凸)関数となる(幕型重力モデルのような、減衰係数の増大に伴う発散という事態は生じない)。

放射・環状距離 X_E の確率密度関数は $f_E(x_E) = e^{-\mu x_E/v} \varphi(x_E)/V_E$ として求められる。便宜上 $\gamma = \mu/v$ と定義すると、 γ が大きいほど分布の裾は軽くなる。平均距離は γ の単調減少関数である。また、我々が通常想定する $0 < \gamma$ なる条件の下では、 γ の増大に連れて距離の標準偏差が単調減少することも判明した。こうした単調性は、我々が集計型モデルに重力モデルを適用する際に、通常想定しているものである。連続型のモデリングに指数型重力モデルを適用するのは妥当であると言ってよいだろう。

参考文献

- 1) 腰塚武志 (1977): 都市平面の基礎的研究, 東京大学都市工学科博士論文。
- 2) 栗田 治 (1997): 無限平面におけるレギュラーならびにランダムな施設配置の下での直線距離の積率計算, 慶應義塾大学理工学部管理工学科 Technical Report, No. 97005。
- 3) 栗田 治 (2001): 円盤都市における道路パターンの理論—直線距離, 直交距離ならびに放射・環状距離の分布—, 都市計画論文集, No.36, pp.859-864。