2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

離散的構造を持つ空間競争モデルにおけるBertrand-Nash均衡解の計算

01605850 NTTコミュニケーションズ(株) *松林 伸生 MATSUBAYASHI Nobuo
02004620 慶應義塾大学 梅澤 正史 UMEZAWA Masashi
01605860 慶應義塾大学 増田 靖 MASUDA Yasushi
01400760 慶應義塾大学 西野 寿一 NISHINO Hisakazu

1 はじめに

本研究では、空間競争モデルとして古くから知られているHotellingの複占モデルを発展させる。同モデルにおける価格均衡（Bertrand-Nash均衡）に関する研究は、特に経済学の分野で盛んに行われてきているが、計算の困難さゆえ、線分上での解析 [2] や企業の位置に対称性を仮定する [3] など、限定された連続モデル上による解析が主であった。これに対し、本研究では顧客が離散的に有限個のノード上に分布していることを仮定した上で、全ての均衡解を求めるアルゴリズムを提案する。そして、利潤関数が有限個のpeakを持つ場合にはアルゴリズムは線形時間で終了することを示す。

2 モデル

同質なサービスを提供する２つの企業AとBを考える。各々は限界費用c_A,c_Bを持ち、サービスの価格$t_A \geq c_A$,$t_B \geq c_B$を設定する。顧客は離散的にn個のノード$1,2,\ldots,n$上に配置されているとし、ノードkの顧客は、AまたはBからサービスを受けるために、正の移動費用c_{kA}またはc_{kB}を支払うものとする。ここで、一般性を失うことなく$c_{1B}-c_{1A} > \ldots > c_{nB}-c_{nA}$を仮定する。いま、$p_k \equiv p_k(t_A,t_B) = min(c_{kA}+t_A, c_{kB}+t_B)$とし、ノード$k$における需要関数（非負、連続、かつ非増加な関数）を$q_k(p_k)$で与える。AとBの商圏を以下のように定義する。

$$Q_A(t_A,t_B) = \{k|c_{kA}+t_A < c_{kB}+t_B\},$$
$$Q_B(t_A,t_B) = \{k|c_{kA}+t_A > c_{kB}+t_B\},$$
$$Q_{AB}(t_A,t_B) = \{k|c_{kA}+t_A = c_{kB}+t_B\}.$$

いま、$k \in Q_{AB}(t_A,t_B)$上の顧客は$\alpha : 1-\alpha$の比率でAとBが分け合うと仮定する。このとき、AとBの利潤関数はそれぞれ以下のようになる。

$$\pi_A(t_A,t_B) = (t_A-c_A)\{\textstyle\sum_{k\in Q_A} q_k(c_{kA}+t_A) + \alpha \sum_{k\in Q_{AB}} q_k(c_{kA}+t_A)\},$$
$$\pi_B(t_A,t_B) = (t_B-c_B)\{\textstyle\sum_{k\in Q_B} q_k(c_{kB}+t_B) + (1-\alpha) \sum_{k\in Q_{AB}} q_k(c_{kB}+t_B)\}.$$

3 Bertrand-Nash均衡

t_Bが与えられたとき、$\bar{t}^k_A(t_B) \equiv c_{kB}-c_{kA}+t_B$ $(k=1,\ldots,n)$と定める。$\bar{t}^1_A(t_B) > \ldots > \bar{t}^n_A(t_B)$ となることに注意する。また、$i^*(t_B) \equiv \max\{i|\bar{t}^i_A(t_B) \geq c_A\}$とする。同様にして、$\bar{t}^k_B(t_A)$, $j^*(t_A)$も定義する。すると、以下の関係が得られる。（紙面の都合でAの側のみ記す。）

Proposition 3.1 *Let $t_A \geq c_A$ and $t_B \geq c_B$. The market is shared by the firms as in Table 3.1.*

Table 3.1: The market areas of A and B

No.	The relation between t_A and t_B	$Q_A(t_A,t_B)$	$Q_{AB}(t_A,t_B)$	$Q_B(t_A,t_B)$
1.(a)	$\bar{t}^1_A < c_A$	$\emptyset$	$\emptyset$	N
1.(b)	$c_A \leq t_A < \bar{t}^{i^*}_A$	$\{1,\ldots,i^*\}$	$\emptyset$	$\{i^*+1,\ldots,n\}$
1.(c)	$c_A \leq t_A = \bar{t}^{i'}_A$ for some i' s.t. $i^* \geq i' \geq 2$	$\{1,\ldots,i'-1\}$	$\{i'\}$	$\{i'+1,\ldots,n\}$
1.(d)	$c_A \leq \bar{t}^{i'}_A < t_A < \bar{t}^{i'-1}_A$ for some i' s.t. $i^* \geq i' \geq 2$	$\{1,\ldots,i'-1\}$	$\emptyset$	$\{i',\ldots,n\}$
1.(e)	$c_A \leq t_A = \bar{t}^1_A$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,\ldots,n\}$
1.(f)	$c_A \leq \bar{t}^1_A < t_A$	$\emptyset$	$\emptyset$	N

今、次のような一変数関数を定める。

$$\pi^i_A(t_A) = (t_A-c_A)\textstyle\sum_{k=1}^{i} q_k(c_{kA}+t_A),\ i=1,\ldots,n,$$
$$\pi^j_B(t_B) = (t_B-c_B)\textstyle\sum_{k=j}^{n} q_k(c_{kB}+t_B),\ j=1,\ldots,n,$$

このとき、上記の関係を用いると、$\pi_A(t_A,t_B)$, $\pi_B(t_A,t_B)$は下図のような区分連続関数として表すことができる。（詳細は[1]を参照。）

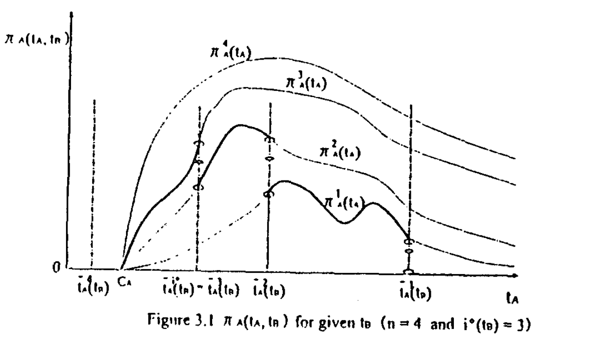

Figure 3.1 $\pi_A(t_A,t_B)$ for given t_B ($n=4$ and $i^*(t_B)=3$)

次に、π_A^iとπ_B^jのpeakを定義する。

Definition 3.1 *$\hat{t}$ is a peak of π_h^i $(h = A, B,\ i = 1, \ldots, n)$ if $\pi_h^i(\hat{t}) > 0$ and there exists $\delta > 0$ such that $\pi_h^i(\hat{t}) \geq \pi_h^i(t)$ for all $t \in (\hat{t} - \delta,\ \hat{t} + \delta)$.*

T_A^i及びT_B^i $(i = 1, \ldots, n)$をπ_A^i及びπ_B^iのpeakの集合とする。さらに、$\bar{\pi}_{A,t_B}^i$と$\bar{\pi}_{B,t_A}^j$を以下のように定める。

$$\bar{\pi}_{A,t_B}^i = \begin{cases} \max\{\pi_A^{i^*}(t_A) \mid c_A \leq t_A \leq \vec{t}_A^{i^*}(t_B)\} & : \ i = i^* \\ \max\{\pi_A^i(t_A) \mid \vec{t}_A^{i+1}(t_B) \leq t_A \leq \vec{t}_A^i(t_B)\} & : \ i^* - 1 \geq i \geq 1, \end{cases}$$

$$\bar{\pi}_{B,t_A}^j = \begin{cases} \max\{\pi_B^{j^*}(t_B) \mid c_B \leq t_B \leq \vec{t}_B^{j^*}(t_A)\} & : \ j = j^* \\ \max\{\pi_B^j(t_B) \mid \vec{t}_B^{j-1}(t_A) \leq t_B \leq \vec{t}_B^j(t_A)\} & : \ j^* + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

以下の定理は、Bertrand-Nash均衡点が存在するための必要十分条件を述べたものである。

Theorem 3.1

1. *If A and B are located at the same point and $c_A = c_B = c$ holds, then $t_A^* = t_B^* = c$ is the unique equilibrium.*
2. *Otherwise, $(t_A^*,\ t_B^*)$ is an equilibrium iff $(t_A^*,\ t_B^*)$ satisfies one of conditions (a)-(c).*
   - *(a)*
     - i. $Q_A(t_A^*, c_B) = N$, $Q_B(t_A^*, c_B) = \emptyset$,
     - ii. $t_A^* \in T_A^n$,
     - iii. $\pi_A^n(t_A^*) = \max\ (\bar{\pi}_{A,t_B^*}^1, \ldots, \bar{\pi}_{A,t_B^*}^n)$.
   - *(b)*
     - i. $Q_A(c_A, t_B^*) = \emptyset$, $Q_B(c_A, t_B^*) = N$,
     - ii. $t_B^* \in T_B^1$,
     - iii. $\pi_B^1(t_B^*) = \max\ (\bar{\pi}_{B,t_A^*}^1, \ldots, \bar{\pi}_{B,t_A^*}^n)$.
   - *(c)*
     - i. $Q_A(t_A^*, t_B^*) = \{1, \ldots, l\}$, $Q_B(t_A^*, t_B^*) = \{l+1, \ldots, n\}$ $(l \leq n-1)$, *and* $Q_{AB}(t_A^*, t_B^*) = \emptyset$,
     - ii. $t_A^* \in T_A^l$ *and* $t_B^* \in T_B^{l+1}$,
     - iii. $\pi_A^l(t_A^*) = \max\ (\bar{\pi}_{A,t_B^*}^1, \ldots, \bar{\pi}_{A,t_B^*}^{i^*})$ *and* $\pi_B^{l+1}(t_B^*) = \max\ (\bar{\pi}_{B,t_A^*}^{j^*}, \ldots, \bar{\pi}_{B,t_A^*}^n)$.

4 均衡点を求めるアルゴリズム

各T_A^i及びT_B^iは既知であり、かつ有限集合であると仮定する。$T_{A,t_B}^i \equiv \{t \in T_A^i \mid \vec{t}_A^{i+1}(t_B) \leq t \leq \vec{t}_A^i(t_B)\}$ for $i = 1, \ldots, i^*$, ただし、$\vec{t}_A^{i^*+1}(t_B) = c_A$とする。同様にして$T_{B,t_A}^j$も定義する。

FINDEQ

Step 0 $E = \emptyset$.

Step 1

1. For all $i = 1, \ldots, n$, $\vec{t}_A^i := c_{iB} - c_{iA} + c_B$.
2. Construct T_{A,c_B}^i for all $1 \leq i \leq n$.
3. **(Check 2.(a)-i and iii in Theorem 3.1)** For each $\hat{t}_A \in T_A^n$, if $\hat{t}_A < c_{nB} - c_{nA} + c_B$, and $\pi_A^n(\hat{t}_A) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\pi_A^i(t) \mid t \in T_{A,c_B}^i$ or $t = \vec{t}_A^i\}$, then add $((\hat{t}_A, c_B), (N, \emptyset))$ to E.
4. If $E = \emptyset$, then go to Step2. Otherwise, go to Step4.

Step 2 For all $j = 1, \ldots, n$, $\vec{t}_B^j := c_{jA} - c_{jB} + c_A$ とし、Step1と同様のプロセスを全ての$\hat{t}_B \in T_B^1$に対し、実行。

Step 3 For all $(\hat{t}_A, \hat{t}_B) \in T_A^l \times T_B^{l+1}$, $l = 1, \ldots, n-1$, do Steps 3-1 to 3-4.

1. For all $i = 1, \ldots, n$ and $j = 1, \ldots, n$, $\vec{t}_A^i := c_{iB} - c_{iA} + \hat{t}_B$ and $\vec{t}_B^j := c_{jA} - c_{jB} + \hat{t}_A$
2. $i^* := \max\{i \mid \vec{t}_A^i \geq c_A\}$, $j^* := \min\{j \mid \vec{t}_B^j \geq c_B\}$ and construct $T_{A,\hat{t}_B}^i$ for all $i \leq i^*$ and $T_{B,\hat{t}_A}^j$ for all $j^* \leq j$.
3. **(Check 2.(c)-i in Theorem 3.1)** If $\vec{t}_A^l < \hat{t}_A < \vec{t}_A^{l-1}$ and $\vec{t}_B^l < \hat{t}_B < \vec{t}_B^{l+1}$, then go to Step 3-4. Otherwise, skip Step 3-4.
4. **(Check 2.(c)-iii in Theorem 3.1)** If $\pi_A^l(\hat{t}_A) = \max_{1 \leq i \leq i^*} \{\pi_A^i(t) \mid t \in T_{A,\hat{t}_B}^i$ or $t = \vec{t}_A^i\}$ and $\pi_B^{l+1}(\hat{t}_B) = \max_{j^* \leq j \leq n} \{\pi_B^j(t) \mid t \in T_{B,\hat{t}_A}^j$ or $t = \vec{t}_B^j\}$, then add $((\hat{t}_A, \hat{t}_B), (\{1, \ldots, l\}, \{l+1, \ldots, n\}))$ to E.

Step 4 All elements of E are equilibrium points, each representing both prices and the market areas of each A and B. If $E = \emptyset$, there exists no equilibrium in our model.

最後に、FINDEQの計算時間について以下の定理にまとめる。

Theorem 4.1 *If T_A^i and T_B^i are known and $|T_A^i|$ and $|T_B^i|$ are polynomial in n for $i = 1, \ldots, n$, we can determine within polynomial time the existence of equilibrium and find all equilibrium prices in which both A and B earn a positive profit.*

参考文献

[1] Matsubayashi,N., Umezawa,M., Masuda,Y. and Nishino,H., Evaluating all Bertrand-Nash equilibria in discrete spatial duopoly model, Working Paper, Faculty of Science and Technology, Keio University.

[2] D'Aspremont,C., Gabszewicz,J.J., and Thisse,J.F., On Hotelling's Stability in Competition, *Econometrica*, 47 (1979) 1145-1150.

[3] Economides,N., Nash Equilibrium in Duopoly with Products Defined by Two Characteristics, *Rand Journal of Economics*, 17-3 (1986) 431-439.