離散最適化用改良代理制約法のインデックス・ファンド問題への適用

01402374 関西大学総合情報学部 *仲川 勇二 NAKAGAWA Yuji
01107170 神戸大学経営学研究科 甲斐 良隆 KAI Yoshitaka
01303370 大阪大学経済学研究科 田畑 吉雄 TABATA Yoshio

1．まえがき

代理制約法は代理乗数を用いて，複数の制約条件式をもつ原問題を単一制約式の代理問題からなる代理双対問題へ変換し，この双対問題を解くことで原問題の最適解を求めようとする方法である．しかし多くの離散最適化問題では，代理双対ギャップ(surrogate duality gap)をもつため代理制約法の適用が困難であった．この問題点を仲川[3]は標的（標的に当たった解を列挙する）問題を解くことで解決した．この改良代理制約（ISC）法により，3 制約条件式をもち 1000 変数で各変数 20 個の代替項目をもつ問題や 8 制約で 500 変数 50 代替項目の問題のように，極めて大規模な多制約非線形ナップザック問題も厳密解を求めることが可能になった．

1992 年に疋田ら[1]は，変数分離形問題の中に非分離形関数が含まれているときに，その関数を一次近似することで分離形に変換し分離形問題として解くことを提案した．本稿では，この方法を用い，ＩＳＣ法を変数非分離形関数が含まれたインデックス・ファンド問題への応用を試みる．

2．非分離形非線形計画問題と分離形局所最適化問題

目的関数が非分離形関数の次の非線形最適化問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}:\ & \text{maximize } f(\xi) \\
\text{s.t.}\ & h_j(\xi)=\sum_{i=1}^{n} h_{ji}(\xi_i) \le b_j \quad (j\in M) \\
& \xi_i^L \le \xi_i \le \xi_i^U \quad (i\in N)
\end{aligned}
$$

ただし，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$，$M=\{1,2,\ldots,m\}$，$N=\{1,2,\ldots,n\}$ で，$f(\xi)$ は微分可能な変数非分離形関数とし，$h_j(\xi)\ (j\in M)$ は分離形関数で微分可能性は仮定しない．この問題に対して凸性は仮定しない．

この非分離形計画問題 P に対して ISC 法を適用可能にするために，個々の暫定解の近傍において変数分離形問題を作成することを考える．ある暫定解を $\xi^{(\ell)}$ $(\ell=0,1,2,\ldots)$ とし，その近傍 $\left|\xi_i-\xi_i^{(\ell)}\right|\le\rho$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を t 分割するために，次の式を満たす離散変数 $x_i\in\{1,2,\ldots,t\}$ を導入する．ここで，ρ を変域幅と呼ぶことにする．

$$
\xi_i=\xi_i^{(\ell)}+(x_i-1)\delta-\rho
$$
$$
\delta=2\rho/(t-1)
$$

また，ξ_i が $\xi_i^L\le\xi_i\le\xi_i^U$ を満たすような x_i の変域を

$$
X_i=\{x_i^L,x_i^L+1,\ldots,x_i^U\}\subseteq\{1,2,\ldots,t\}
$$

とする．このとき，暫定解 $\xi^{(\ell)}$ の近傍での最適化問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}^{(\ell)}:\ & \text{maximize } f(\xi^{(\ell)})+\nabla f(\xi^{(\ell)})\cdot\Delta\mathrm{x} \\
\text{s.t.}\ & g_j^{(\ell)}(\mathrm{x})=\sum_{i=1}^{n} g_{ji}^{(\ell)}(x_i)\le b_j \quad (j\in M) \\
& x_i\in X_i \quad (i\in N)
\end{aligned}
$$

ただし，$\nabla f=(\partial f/\partial\xi_1,\partial f/\partial\xi_2,\ldots,\partial f/\partial\xi_n)$，$\Delta\mathrm{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n)$，$\Delta x_i=(x_i-1)\delta-\rho$，$g_{ji}^{(\ell)}(x_i)=g_{ji}(\xi_i^{(\ell)}+(x_i-1)\delta-\rho)$．問題 $\mathrm{P}^{(\ell)}$ は変数 x に対して分離形離散最適化問題（非線形ナップザック問題）である．この問題は ISC 法を用いて厳密かつ高速に解くことができる．問題 $\mathrm{P}^{(\ell)}$ を用いて原問題 P を解くための手順は次のようになる．

入力： 原問題 P，初期暫定解 $\xi^{(0)}$，分割数 t，誤差 ε；

1. $\ell\leftarrow 0$；
2. Repeat
3. $\ell\leftarrow\ell+1$；
4. 変域幅 ρ を設定し，$\delta\leftarrow 2\rho/(t-1)$ とする；
5. 暫定解 $\xi_i^{(\ell-1)}$ 近傍で問題 $\mathrm{P}^{(\ell)}$ を作成し，ISC 法で解き最適解 $\mathrm{x}^{(\ell)}$ を求める；
6. $\xi_i^{(\ell)}\leftarrow\xi_i^{(\ell-1)}+(x_i^{(\ell)}-1)\delta-\rho$ $(i=1,2,\ldots,n)$ とする；
7. Until $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i^{(\ell)}-\xi_i^{(\ell-1)}\right|\le\varepsilon\right)$

8. 暫定解 $\xi^{(\ell)}$ を最適解として出力する.

3. 計算実験

提案した解法の有効性を示すために, インデックス・ファンド問題[4],[5]を取り上げる. この問題を非凸計画問題として取り扱う. 目標となる市場インデックス (日経 225) の指数を R_0 とし, 選択された q 種類の銘柄に対する収益率の変動を R で表せば, 問題は次のように書ける.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize}\quad \mathrm{S} &= \mathrm{E}[(R_0 - R)^2] \\
&= \mu_0{}^2 + \sigma_{00} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu_i\mu_j + \sigma_{ij})\xi_i\xi_j \\
&\quad - 2\sum_{i=1}^{n}(\mu_0\mu_i + \sigma_{0i})\xi_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{subject to}\quad & \sum_{i=1}^{n}\xi_i = 1 \\
& \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi_i) = q \\
& \xi_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)
\end{aligned}
$$

ただし, μ_i は銘柄 i の平均, σ_{ij} は銘柄 i, j の共分散で,

$$
\varphi_i(\xi_i) = \begin{cases} 0 & (\xi_i = 0) \\ 1 & (\xi_i > 0) \end{cases}
$$

である. 実験ではデータが全てそろっている 95 年 4 月から 98 年 3 月の 3 ヵ年の日経 225 実データを使用した. 変域幅 ρ は得られた解の状況を見ながら経験的に, 0.2 から 0.00001 まで徐々に変化させて解いた. 変域の分割数 t は 100 に固定した. また, 等号制約は次の 4 種類の不等号制約式

1) $\sum_{i=1}^{n}\xi_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi_i) \leq q$,

2) $\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi_i) \leq q$,

3) $\sum_{i=1}^{n}\xi_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi_i) \geq q$,

4) $\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi_i) \geq q$

を切り替えて, 等号制約を満たす解を見つけた. この問題に対して得られた最適解は表 1 である. この 50 銘柄のポートフォリオの合計は 1 で目的関数値は S= 0.000721 である. ここで日経 225 の $\mu_0{}^2 + \sigma_{00}$ の値が 34.398425 であることを考慮すると, 極めて良い精度の解が得られたことが分かる.

表 1　50 銘柄のポートフォリオ

極洋	住友石炭	佐藤工業	鉄建建設	熊谷組
0.00737	0.01664	0.00325	0.01011	0.00047
青木建設	森永製菓	アサヒ	ホーネン	富士紡績
0.00267	0.03292	0.05998	0.02219	0.00192
東亜合成	電気化学	日本合成	武田薬品	旭硝子
0.01030	0.01053	0.01676	0.02502	0.03664
		⋮		
0.01159	0.00223	0.01655	0.05652	0.02766
凸版印刷	大日本印刷	ヤマハ	東急百貨店	東京三菱
0.03522	0.01344	0.01623	0.01209	0.06001
住友銀行	野村証券	東京海上	三菱地所	小田急電鉄
0.03018	0.01900	0.01703	0.03008	0.03193
ナビックス	関西電力	東京ガス	大阪ガス	東京ドーム
0.02186	0.02247	0.04789	0.03529	0.04604

4. むすび

本解法は, 従来解くことが極めて難しいと考えられていた非凸二次計画問題を効果的に解くことを可能にした. 計算機実験ではインデックス・ファンド問題を取り上げたが, 今後は他の非凸二次計画問題に対して適用し, 有効性を確認する予定である. また, 本実験においては, 変域幅 ρ は経験的に決定したが, 系統的な値の決定法は今後の研究課題である.

参考文献

[1] M. Hikita, Y. Nakagawa, K. Nakashima, and H. Narihisa, "Reliability optimization of systems by a surrogate-constraints algorithm, " IEEE Trans. on Rel. vol. 41, pp. 473-480, 1992.

[2] 甲斐良隆, 資産運用とリスクマネージメント, エコノミスト社, 2001.

[3] Y. Nakagawa, "An improved surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming", Journal of Operations Research Society of Japan, vol. 46, pp. 145-163, 2003.

[4] 田畑吉雄, 竹田英二, "最小トラッキング・エラーとインデックス・ファンド, " ファイナンス研究, No. 16, pp. 55-69, 1993.

[5] Y. Tabata, E. Takeda, "Bicriteria optimization problem of designing an index fund", Journal of the Operations Research Society, vol. 46, pp. 1023-1032, 1995.

[6] 田畑吉雄, 金融工学入門, エコノミスト社, 2002.