

回転対称な起・終点分布の下での放射・環状距離分布
- Croftonの微分方程式の新しい応用例 -

01107680 慶應義塾大学 粟田 治 KURITA Osamu

1. 縮言

半径 α の円盤領域A内で、移動の起点と終点が独立に同一分布に従って出現する。このとき起・終点間距離Sの確率密度関数を、便宜上 $f(s, \alpha)$ と表わす。Sは如何なる距離でもよい。以下に、 f の半径 α による微係数 $\frac{d}{d\alpha} f(s, \alpha)$ を明示したい。これはCroftonの微分方程式[1,2]の1つの特殊例である。その目的は、この微分方程式を解いて、距離Sの分布を見通し良く導出することにある。都市の交通基軸パターンとの設計と人口分布の在り方が、移動に関わるサービス水準を規定する様子を、本モデルを通じて巨視的に解析できる。

2. 円盤内距離分布に関するCroftonの微分方程式

準備として、まず半径の増分 $\Delta\alpha$ を設け、半径 $\alpha + \Delta\alpha$ の円盤C上に分布する2点間の距離の確率密度関数 $f(s, \alpha + \Delta\alpha)$ に着目する。そして図1-(a)のように、半径 α の円盤領域をA、外側の微小リング領域をBと呼ぶ。すなわち $C = A \cup B$ である。そして、円盤領域A内の起点(そして終点)の測度(点の密度をA上で積分したものを)Vとする。同様に、リング領域B内の起点(そして終点)の測度は ΔV で表わしておく。

さて、円盤領域C上の2点間の移動は、(1)A → Aの内内移動、(2)A → BとB → Aの移動、(3)B → Bの内内移動、という3者に直和分解される(図1-(b)参照)。それぞれの測度(起点・終点ペアの量)は当然(1) V^2 、(2) $2V\Delta V$ 、(3) $(\Delta V)^2$ である(表1の第2列)。これを全体の測度(円盤C上の起・終点ペアの総量) $(V + \Delta V)^2$ で除せば、3種類の移動が全測度に占める割合が求められる(表1の第3列)。

ここで幅 $\Delta\alpha$ のリングB内の点と、半径 α の円盤A内の点の距離の確率密度関数を $g(s, \alpha, \Delta\alpha)$ と定義する。加えて、リングB上に分布する2点間の距離の確率密度関数を $h(s, \alpha, \Delta\alpha)$ と定義する(表1の第4列)。

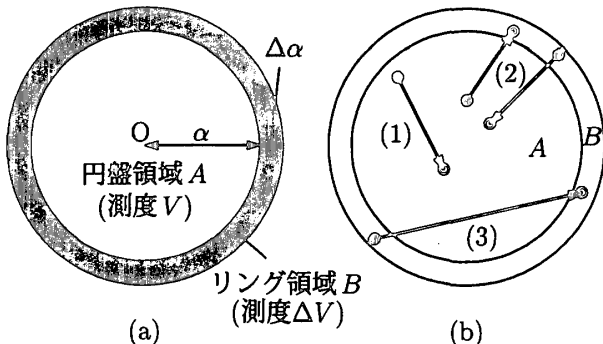


図1 半径 α の円盤領域Aと半径の増分 $\Delta\alpha$ によって出来る微小リング領域B(全体の円盤領域は $C = A \cup B$ であり、その測度は $V + \Delta V$)。

表1 C^2 の(1) A^2 、(2) $(A \times B) \cup (B \times A)$ 、(3) B^2 への直和分解と、対応するSの確率密度関数。

起・終点ペアの種類	ペアの量(測度)	全測度に占める割合	Sのp.d.f.
(1)	V^2	$\frac{V^2}{(V + \Delta V)^2}$	$f(s, \alpha)$
(2)	$2V\Delta V$	$\frac{2V\Delta V}{(V + \Delta V)^2}$	$g(s, \alpha, \Delta\alpha)$
(3)	$(\Delta V)^2$	$\frac{(\Delta V)^2}{(V + \Delta V)^2}$	$h(s, \alpha, \Delta\alpha)$
(全体)	$(V + \Delta V)^2$	1	$f(s, \alpha + \Delta\alpha)$

続いて $f(s, \alpha + \Delta\alpha)$ を $f(s, \alpha)$ 、 $g(s, \alpha, \Delta\alpha)$ ならびに $h(s, \alpha, \Delta\alpha)$ の加重和で表す。そのためには直和分解された起・終点ペア集合に対応する確率密度に、前出の、全測度に占める割合を乗じて足せばよい：

$$f(s, \alpha + \Delta\alpha) = \frac{V^2}{(V + \Delta V)^2} f(s, \alpha) + \frac{2V\Delta V}{(V + \Delta V)^2} \times g(s, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta V)^2}{(V + \Delta V)^2} h(s, \alpha, \Delta\alpha). \quad (1)$$

(1)式の両辺に $(V + \Delta V)^2$ を乗じた上で、両辺から $f(s, \alpha)$ を引く。それを $\Delta\alpha$ で除した上で $\Delta\alpha \rightarrow 0$ なる極限操作を施すと次の微分方程式を得る：

$$\frac{df(s, \alpha)}{d\alpha} = \frac{2}{V} \cdot \frac{dV}{d\alpha} \left\{ g(s, \alpha) - f(s, \alpha) \right\}. \quad (2)$$

ただし $\frac{dV}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta\alpha}$ と仮定した。加えて極限では $\Delta\alpha = 0$ だから、 $g(s, \alpha, 0)$ を簡単に $g(s, \alpha)$ と記した。 $g(s, \alpha)$ は円周上の点と円盤内の点を結ぶ距離の確率密度関数を意味する。ここで(2)式の $d\alpha$ を V に通分して V に関する微分方程式として書き直すと次の通り：

$$df / dV = 2(g - f) / V. \quad (3)$$

(3)式はCroftonの微分方程式[1,2]の一般形である。

3. 回転対称な起・終点分布の下での特論

円盤の中心点Oから直線距離xの地点での起点(そして終点)の密度を、回転対称に

$$\rho = \rho(x) \quad (0 \leq x \leq \alpha) \quad (4)$$

と与える(図2)。このとき測度Vは次で表される：

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{x=0}^{\alpha} \rho(x)x \, dx \, d\theta = 2\pi \int_0^{\alpha} \rho(x)x \, dx. \quad (5)$$

したがって、その α による微係数は次式で与えられる：

$$dV / d\alpha = 2\pi\alpha\rho(\alpha). \quad (6)$$

(5)と(6)を(2)に代入して次式を得る：

$$df(s, \alpha) / d\alpha = K^* \{g(s, \alpha) - f(s, \alpha)\}. \quad (7)$$

ただし K^* は次の通り :

$$K^* = 2\alpha\rho(\alpha) / \int_0^\alpha \rho(x)x dx. \quad (8)$$

K^* ならびに円周上の点から円盤上の点への距離の確率密度関数 $g(s, \alpha)$ を準備すれば, 求める円盤内の距離の確率密度関数 $f(s, \alpha)$ の α に関する一階線形微分方程式が (7) によって提供されるという次第である.

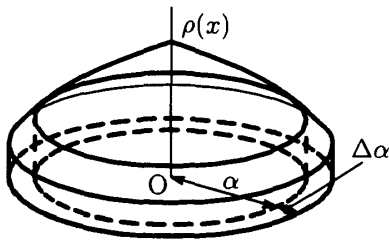


図2 回転対称な人口分布の下での半径 α の増分 $\Delta\alpha$.

4. 放射・環状距離分布への応用

円盤都市内に原点 O を中心とする, 限りなく稠密な放射・環状道路が存在する場合に応用してみよう. ここで起・終点を円盤中心を原点とする極座標で与えるとき, 2点の角差が 2rad 以下のときは図3の Route 1 が, 2rad 以上のときは Route 2 が最短経路となることは周知である. この性質に基づいて円周上の1点 P からの放射・環状距離の等高線を描くと図4を得る. 等高線の形状が, (i) $0 \leq s \leq \alpha$ と (ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ に場合分けして記述されるのである.

導出過程は割愛するが, 図4に基づく計算を行うことによって, 円周上の点 P からの放射・環状距離の確率密度関数が次の通りに導かれる :

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$g(s) = \frac{2}{V} \int_{\alpha-s}^\alpha \rho(x) dx, \quad (9)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$g(s) = \frac{2}{V} \left\{ (\pi - 2)(s - \alpha)\rho(s - \alpha) + \int_{s-\alpha}^\alpha \rho(x) dx \right\}. \quad (10)$$

一例として, $\rho(x)$ を周知の Clark 型人口密度

$$\rho(x) = e^{-\gamma x}. \quad (11)$$

で与えてみよう. (8) によって Crofton の微分方程式の係数 K^* を求めると, 次の通りである :

$$K^* = \frac{2\gamma^2\alpha}{1 + \gamma\alpha - e^{-\gamma\alpha}}. \quad (12)$$

これに加えて, (11) に基づき算出される (9) と (10) を $g(s, \alpha)$ として (7) に代入する. こうしてできる微分方程式を解くと, 求める距離の確率密度関数 f が陽に導出される (結果は割愛). Clark の式のパラメータ γ を -0.12 から $+0.12$ まで 0.04 刻みで変化させて, f の概形を描

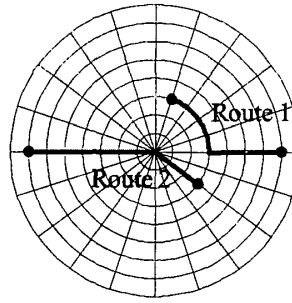


図3 放射・環状交通網における最短経路.

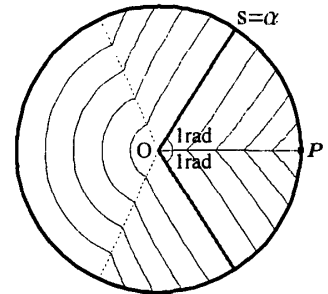


図4 周上の点からの距離の等高線.

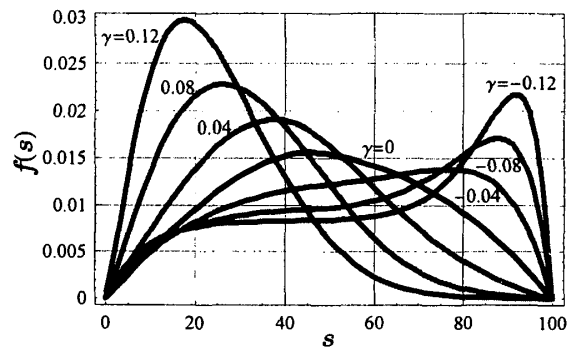


図5 Clark 型分布 $\rho(x) = e^{-\gamma x}$ に対する放射・環状距離 S の確率密度関数 (円盤の半径は $\alpha = 50$ とした).

き分けると図5の通りとなる. 当然, γ が小さいほど (すなわち人口の郊外へのスプロールが進むに連れて) 距離分布の裾が重くなっている.

他に, 人口密度 $\rho(x)$ が x の線形関数で与えられる場合も, 放射・環状距離分布が陽に導出できる.

5. 結語と発展

【1】円盤上の一様でない起・終点分布に対して (多分) 初めて距離分布が導出された. 【2】円盤上の2点が相異なる分布に従う場合の距離分布に対しても, 同様の接近法が有効である. こちらは本論文の (2), (3) 式とは異なり, Crofton の微分方程式の本質的な一般化と見做せる. 【3】中心部に通行不能な円盤領域が存在する場合に, 放射・環状距離分布を導出すべきである (ロード・プライシングによる距離分布の変化モデル).

謝辞

本研究は, 文部科学省平成15年度21世紀COEプログラム『知能化から生命化へのシステムデザイン』の補助を受けました. ここに記し謝意を表します.

参考文献

- [1] 腰塚武志 (1977): 都市平面の基礎的研究, 東京大学都市工学科博士論文.
- [2] 腰塚武志 (1986): 都市平面における距離の分布, (谷村秀彦他, 『都市計画数理』, 朝倉書店).
- [3] 栗田 治 (2001): 円盤都市における道路パターンの理論—直線距離, 直交距離ならびに放射・環状距離の分布—, 都市計画論文集, No. 36, pp. 859—864.