日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

ゲーム理論的意思決定のAHP分析

――2人非協力零和2×2行列ゲーム・混合戦略の場合――

日本大学　篠原正明
情報システム研究所　篠原　健

1．はじめに

ゲーム理論の意思決定枠組では、利害が競合する複数の意思決定プレイヤが組み込まれるゲーム理論的環境におけるプレイヤの戦略決定に関する平衡点(あるいは均衡状態)の分析ならびに特徴付けが主要研究課題の1つである。本論文では、利得構造が行列で表現できる場合の単純なケースとして、2人非協力零和2×2行列ゲームで、かつ、各プレイヤーの均衡戦略が混合戦略で与えられる場合について、利得行列にAHP的な評価基準による分解を適用する。すなわち、本来の利得行列Aが、複数の評価基準毎の利得行列B, C,... の和で与えられると想定し(例えば、A=B+C+D),総合利得行列Aの均衡戦略と、個別利得行列B,C,D毎の均衡戦略の間の関係を調べる。

2．簡単な例〔1, 2〕

2人非協力零和2×2行列ゲームにおいて、総合利得(便益)行列Aが、次式(1)で与えられる。ここで、行列Aは最大化プレイヤの利益(便益)であり、最小化プレイヤでは損失(コスト)となる。又、総合利得行列Aは、2つの利得(便益)評価基準の個別利得行列B((2)式)、C((3)式)の凸結合で与えられる(4)。

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}14 & 5\\ 4 & 19\end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$C=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 8\end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$A=pB+(1-p)C,\quad p=1/3 \qquad (4)$$

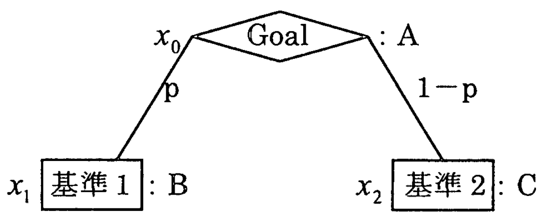

図1　総合利得行列の階層分解

ここで、総合利得行列A、個別利得行列B、Cに対する最大化プレイヤの混合戦略ベクトルを、各々x_0, x_1, x_2,最小化プレイヤの混合戦略ベクトルをy_0, y_1, y_2とする。

$$x_0=\begin{pmatrix}5/8\\ 3/8\end{pmatrix},\qquad y_0=\begin{pmatrix}3/8\\ 5/8\end{pmatrix}$$

$$x_1=\begin{pmatrix}1/4\\ 3/4\end{pmatrix},\qquad y_1=\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

$$x_2=\begin{pmatrix}0.7\\ 0.3\end{pmatrix},\qquad y_2=\begin{pmatrix}0.6\\ 0.4\end{pmatrix}$$

ここで、$x_0=px_1+(1-p)x_2$あるいは$y_0=py_1+(1-p)y_2$という関係は成立していない。すなわち、個別の評価基準の下での均衡戦略を、各評価基準の優先ウェイトで重み付け平均しても、一般には、総合利得に対する均衡戦略は得られないと言える。

3．総合戦略と個別戦略の関係

総合利得行列の均衡戦略を総合戦略、個別利得行列の均衡戦略を個別戦略とし、以下に両者の満たすべき関係を、非協力零和2×2 行列ゲームでかつ均衡点が純粋戦略を許容しない混合戦略となる場合について、解明する。但し、均衡点が純粋戦略を許容しない混合戦略とは、厳密には、$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$の各要素が 0 を含まず 0 以上 1 未満となる場合である。

定理１　分解数＝２の場合

総合戦略ベクトルを(x_0, y_0)、個別戦略ベクトルを各々、(x_1, y_1)、(x_2, y_2)とすると、次式が成立する。

$$x_0 = \frac{p\Delta_1}{p\Delta_1 + (1-p)\Delta_2} x_1 + \frac{(1-p)\Delta_2}{p\Delta_1 + (1-p)\Delta_2} x_2 \qquad (5)$$

$$y_0 = \frac{p\Delta_1}{p\Delta_1 + (1-p)\Delta_2} y_1 + \frac{(1-p)\Delta_2}{p\Delta_1 + (1-p)\Delta_2} y_2 \qquad (6)$$

定理２　分解数＝nの一般の場合

総合戦略ベクトルを(x_0, y_0)、評価基準iの個別戦略ベクトルを(x_i, y_i)とすると、次式が成立する。

$$x_0 = \sum \frac{p_i \Delta_i x_i}{\Delta} \qquad (7)$$

$$y_0 = \sum \frac{p_i \Delta_i y_i}{\Delta} \qquad (8)$$

但し、Δ_iは第i個別利得行列を$A(i)$とする時、

$$\Delta_i = a_{11}(i) + a_{22}(i) - a_{12}(i) - a_{21}(i) \qquad (9)$$

又、$\Delta = \sum p_i \Delta_i, \quad \sum p_i = 1$である。

2 章の例題に定理 1 を適用すると、$p = 1/3, \quad \Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = 10$となり、(5)式と(6)式が成立していることが確認できる。

すなわち、総合戦略は、個別戦略の評価基準毎の優先ウェイトp_iによる凸結合ではなく、個別利得行列$A(i)$の特性Δ_iをも加味した$p_i\Delta_i$による(凸)結合で表現できる(なお、$p_i \geq 0$であるが、$\Delta_i \geq 0$とは限らないので、凸結合には限定されない)。

4．おわりに

Δ_iは個別利得行列$A(i)$の支払いに関する大きさ(規模)を表す尺度と考えられるので、$p_i\Delta_i$による(凸)結合は、評価基準iの優先ウェイトp_iと評価基準iの個別利得行列の影響度合Δ_iの両者を考慮した戦略レイヤでの重み付け総合化と解釈できる。

さらに，ゲーム構造にＡＨＰ的な階層構造分解を導入することにより、上位の戦略層と下位の戦術層という層別化が可能となった。3 章の個別戦略は個別戦術と考えられる。本論文は、このような上位戦略層と下位戦術層という層別化枠組みにおける、戦略ベクトルと戦術ベクトルの関係づけを与える。

非協力零和行列ゲームの枠組内での一般化、ならびに、非協力零和行列ゲームの枠組外への拡張が今後の課題である。

参考文献

〔１〕時田節子：ゲーム理論のＡＨＰ分析 日本大学生産工学部数理工学科平成 15 年度卒業研究論文(2004.2)

〔2〕時田節子、篠原正明：ＡＨＰとゲーム理論の融合、第 36 回日本大学生産工学部学術講演会数理情報部会、7-44,pp.131-134 (2003.12.6)