

数量割引問題に関する最適取引数量と最適割引率の決定 — 商品の需要量が展示量に依存する場合 —

01110624 流通科学大学情報学部 * 川勝 英史 KAWAKATSU Hidefumi
01105054 兵庫県立大学経営学部 菊田 健作 KIKUTA Kensaku
01204194 神戸学院大学経営学部 三道 弘明 SANDOH Hiroaki

1. はじめに

卸売業では、在庫として凍結されている資産を極力小さく抑えるために、Quantity Discount (数量割引) を実施することが少なくない [1]. 数量割引には、取引数量に応じた割引率を設定することにより、小売業に当初予定していた発注量よりも大きな量を発注させるよう促す効果がある。また、スーパーマーケットやコンビニエンス・ストアなどの小売業が取り扱う商品には、商品の陳列量が大きい程よく売れ、その陳列量が少なくなると余り売れなくなるという性質を有するものが数多く見受けられる [2, 3, 4, 5]. ここでは、小売業が顧客に販売する商品の需要量は、商品の陳列量に対して巾乗の構造で与えられるような場合に注目し [4, 5], 小売業は、卸売業に提示された「取引数量」と、この量に応じた「割引率」とをもとに数量割引を利用するかどうかを決定するような場合を考える。以下では、問題を卸売業と小売業間の Stackelberg ゲーム [6] として把握することにより卸売業の単位時間当り総利益を最大にするという意味での最適取引数量並びに最適割引率を決定するようなモデルを提案する。さらに、数量割引により、1回当り取引数量を大きくできる場合だけでなく、この取引数量を小さく設定することが卸売業にとって得策となる場合が存在する可能性についても追求する。

2. 記号と仮定

本研究で主に用いる記号は次の通りである。(1) a_s : 卸売業の1回当り発注費用。(2) a_b : 小売業の1回当り発注費用。(3) h_s : 卸売業の単位在庫当り単位時間当り在庫維持管理費用。(4) h_b : 小売業の単位在庫当り単位時間当り在庫維持管理費用。(5) p_s : 卸売業が小売業に単位商品を販売する卸売価格。(6) y : 単位商品当り卸売価格に対する割引率。(7) p_b : 小売業の単位商品当り販売価格。(8) c_s : 卸売業の単位商品当り購入費用。(9) Q : 小売業の最大在庫量。(10) q_1 : 数量割引を利用しない場合の小売業の発注点 ($0 \leq q_1 < Q_U$)。 (11) q_2 : 数量割引を利用する場合の小売業の発注点 ($0 \leq q_2 < Q_U$)。 (12) Q_U : 小売業の在庫量の上限。(13) $A(t)$: 小売業の時刻 t における在庫水準。

また、本研究での仮定は次の通りである。(1) 商品の需要量は確定的である。(2) 小売業が顧客に販売す

る商品は、商品の展示量が大きい程よく売れ、少なくなると余り売れなくなる。このような商品の時刻 t における需要量 $D(t)$ を、 $D(t) = \alpha A^\beta(t)$ ($\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$) により表現する [4, 5]. なお、卸売業における商品の需要量は、商品の展示量に依存しない。(3) 小売業におけるバックルーム* 在庫は認めず、展示可能な商品の最大量 (在庫量の上限) Q_U を制約として与える。(4) 小売業は、在庫量が q_i ($i = 1, 2$) に到達した時点で在庫水準が Q となるよう $Q - q_i$ だけ発注する。なお、小売業の1回当り発注量を「取引数量」と呼ぶことにする。(5) 卸売業の1回当り発注量を、 $N_i(Q - q_i)$ ($N_i = 1, 2, 3, \dots$, $i = 1, 2$) により表現する。

3. 小売業の単位時間当り総利益

仮定 (3) で述べたような性質を有する商品に対して、その最適最大在庫量並びに最適発注点を求めようとした研究に Baker and Urban [4] や Urban [5] がある。彼らのモデルでは、最適最大在庫量及び最適発注点に関する解析には相当な困難が伴うため [4, 5], 本研究では、小売業の最大在庫量について $Q = Q_U$ の場合に場合に焦点を絞ることとする。

このとき、数量割引を利用しない場合の小売業の単位時間当り総利益は

$$\pi_1(q_1) = \frac{\alpha g(Q_U - q_1) - \frac{h_b}{2-\beta} M_2(q_1) - \alpha a_b}{M_1(q_1)/(1-\beta)} \quad (1)$$

で与えられる。但し、 $g = p_b - p_s$, $M_j(q_1) = Q_U^{j-\beta} - q_1^{j-\beta}$ ($j = 1, 2$) である。ここで、式 (1) の $\pi(Q_0)$ を最大にするような $q_1 = q_1^*$ は次の通りである。

(i) $\frac{h_b}{2-\beta} Q_U^{2-\beta} - \alpha g Q_U < -\alpha a_b$ のとき、 $q_1^* > 0$ ($< Q_U$) が唯一存在し、 $\pi_1(q_1^*) = \left[\alpha g q_1^{*(1-\beta)} - h_b \right] q_1^*$ を得る。

(ii) 他の場合には、 $q_1^* = 0$ であり、 $\pi_1(q_1^*) = \pi_1(0)$ である。

また本研究では、数量割引を利用した場合に得られる小売業の単位時間当り総利益を次式のように与

*バックルームとは、店舗に存在する売り場以外のスペースのことであり、例えば、倉庫のように商品の保管を目的とするスペースのことである。

えることができる。

$$\pi_2(q_2, y) = \frac{\alpha(g + yp_s)(Q_U - q_2) - \frac{h_b M_2(q_2)}{2-\beta} - \alpha a_b}{M_1(q_2)/(1-\beta)} \quad (2)$$

4. 卸売業の単位時間当り総利益

小売業が数量割引を利用しない場合、卸売業の単位時間当り総利益は

$$P_1(N_1, q_1^*) = \frac{\alpha(1-\beta)(p_s - c_s)(Q_U - q_1^*) - \frac{a_s}{N_1}}{M_1(q_1)} - \frac{h_s}{2}(Q_U - q_1^*)(N_1 - 1) \quad (3)$$

と与えられる。これに対し、小売業が数量割引を利用する場合には次式が成立する。

$$P_2(N_2, q_2, y) = \frac{[(1-y)p_s - c_s](Q_U - q_2) - \frac{a_s}{N_2}}{M_1(q_2)/[\alpha(1-\beta)]} - \frac{h_s}{2}(Q_U - q_2)(N_2 - 1) \quad (4)$$

5. 小売業の最適反応

小売業のオプションを次のように定義する。

オプション A_1 : 数量割引を利用しない。

オプション A_2 : 数量割引を利用する。

ここで

$$\psi(q_2) \equiv \frac{1}{\alpha p_s} \left[\frac{\frac{\pi_1(q_1^*) M_1(q_2)}{1-\beta} + \frac{h_b M_2(q_2)}{2-\beta} + \alpha a_b}{Q_U - q_2} - \frac{g}{p_s} \right] \quad (5)$$

とおき、領域 Ω_i ($i = 1, 2$) を次のように定義する。

$$\Omega_1 = \left\{ (q_2, y) \mid y \leq \psi(q_2) \right\}, \quad \Omega_2 = \left\{ (q_2, y) \mid y \geq \psi(q_2) \right\}$$

このとき、小売業の最適反応は次のようになる。

(a) $(q_2, y) \in \Omega_1 \setminus \Omega_2$ ならば、 $A_1 \succ A_2$ である。

(b) $(q_2, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1$ ならば、 $A_2 \succ A_1$ である。

(c) $(q_2, y) \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ ならば、 $A_1 \sim A_2$ である。

ここに、 $m \succ n$ は n より m が選好されることを意味し、 $n \sim m$ は n と m とが無差別であることを意味する。

6. 最適戦略

$(q_2, y) \in \Omega_1 \setminus \Omega_2$ のとき、小売業は数量割引を利用しない。このとき、卸売業の単位時間当り総利益は式 (3) で与えられる。また、 $(q_2, y) \in \Omega_2 \setminus \Omega_1$ のとき、小売業は数量割引を利用することになり、卸売業の最適政策 (q_2^*, y^*) は以下ようになる。

但し、 $N_i^* \geq 2$ ($i = 1, 2$) の場合の解析には相当な困難を伴うため、 $N_i^* = 1$ の場合に注目する。

- (i) $\frac{h_b}{2-\beta} Q_U^{2-\beta} - \alpha(p_b - c_s) Q_U \geq -\alpha a_b$, または、
 $-\alpha(a_b + a_s) < \frac{h_b}{2-\beta} Q_U^{2-\beta} - \alpha(p_b - c_s) Q_U < -\alpha a_b$ かつ $\frac{h_b}{2-\beta} Q_U^{2-\beta} - \alpha g Q_U \geq -\alpha a_b$ のとき :

このとき、 $q_2^* \rightarrow +0$, $y^* \rightarrow +0$ であり、 $P_2(N_2^*, q_2^*, y^*) = P_1(N_1^*, q_1^*)$ が成り立つ。従って、小売業が数量割引を利用することと利用しないこととは無差別である。

- (ii) $-\alpha(a_b + a_s) < \frac{h_b}{2-\beta} Q_U^{2-\beta} - \alpha(p_b - c_s) Q_U < -\alpha a_b$ かつ $\frac{h_b}{2-\beta} Q_U^{2-\beta} - \alpha g Q_U < -\alpha a_b$ のとき :

この場合、 $q_2^* \rightarrow +0$ ($< q_1^*$), $y^* \rightarrow \psi(q_2^*) + 0$ であり、 $P_2(N_2^*, q_2^*, y^*) > P_1(N_1^*, q_1^*)$ が成立する。よって、小売業が数量割引を利用するよう (q_2, y) を設定することが得策となる。

- (iii) $\frac{h_b}{2-\beta} Q_U^{2-\beta} - \alpha(p_b - c_s) Q_U < -\alpha a_b$ のとき :
 この場合、 $P_2(N_2^*, q_2, \psi(q_2))$ を最大にするような正の $q_2 = q_2^o$ ($< Q_U$) が唯一存在し、

$$q_2^* \rightarrow \begin{cases} q_2^o + 0, & q_2^o < q_1^* \\ q_2^o - 0, & q_2^o > q_1^* \end{cases}, \quad y^* \rightarrow \psi(q_2^*) + 0$$

となる。このとき、卸売業は単位時間当りに $P_2(N_2^*, q_2^*, y^*) = \left[\alpha(p_b - c_s) q_2^{*(1-\beta)} - h_b \right] q_2^*$ ($> P_1(N_1^*, q_1^*)$) なる利益を得ることができ、小売業が数量割引を利用するよう (q_2, y) を提示することが得策となる。なお、 $q_2^o > q_1^*$ のとき、数量割引により 1 回当り取引数量は小さくなる。

参考文献

- [1] M. Parlar and Q. Wang, A Game theoretical analysis of the quantity discount problem with perfect and incomplete information about the buyer's cost structure. *RAIRO/Operations Research*, **29**, No. 4, (1995), 415-439.
- [2] 川勝, 三道, 濱田, 小売業における特別展示商品に対する最適発注量: 単位時間当り総利益の最大化, *日本応用数学会論文誌*, **10**, No.2, (2000), 175-186.
- [3] 川勝, 三道, 濱田, 小売業における特別展示商品に対する最適発注量: 鏡及び上げ底の効果, *日本応用数学会論文誌*, **12**, No.2, (2002), 135-154.
- [4] R. C. Baker and T. L. Urban, A deterministic inventory system with an inventory-level-dependent demand rate, *Journal of the Operational Research Society*, **39**, No.9, (1988), 15-35.
- [5] T. L. Urban, An inventory-theoretic approach to product assortment and shelf-space allocation, *Journal of Retailing*, **74**, (1998), 15-35.
- [6] M. J. Osborne and A. Rubinstein, *A Course in Game Theory*, The MIT Press, Massachusetts, (1994).